

Interreg



EUROPÄISCHE  
UNION

Österreich-Tschechische Republik

Europäischer Fonds für regionale Entwicklung



# MASCHINENBAU

## Statik



UNIVERSITY  
OF APPLIED SCIENCES  
UPPER AUSTRIA



EUROPÄISCHE UNION

# INHALT

1. Statische Grundbegriffe, Prinzipien und Axiome .....	3
1.1. Grundbegriffe .....	3
1.2. Kraft- und Momenteinheiten.....	5
1.2.1. Kraftsysteme .....	6
1.3. Klassifizierung von Kräften durch Handeln.....	7
1.4. Zerlegung der Kraft, Kraftkomponenten .....	8
1.4.1. Varignon´s Theorem .....	10
1.5. Statische Grundprinzipien und Axiome .....	10
1.5.1. Axiom der Trägheit (1. Newton-Gesetz).....	11
1.5.2. Axiom der Aktionsreaktion (3. Newton-Gesetz).....	11
1.5.3. Axiom der konservierenden Wirkung .....	11
1.5.4. Axiom der Kräfte, die sich zusammensetzen. ....	12
2. Mobilität und Verknüpfungen von materiellen Objekten.....	15
2.1. Links und Linkabhängigkeit.....	15
2.2. Grad der Bewegungsfreiheit und Verbindungsabhängigkeit von starren Körpern.....	16
2.3. Kinematische und statische Bestimmtheit.....	17
3. Partikel in der Ebene .....	18
3.1. Freiheitsgrad und Verbindungsabhängigkeit der Partikel in der Ebene.....	18
3.2. Verknüpfungen von Partikeln in der Ebene .....	19
3.3. Partikel im Raum .....	20
3.3.1. Freiheitsgrade und Verbindungsabhängigkeit der Partikel im Raum .....	20
3.3.2. Verknüpfungen von Partikeln im Raum.....	21
3.4. Steifer Körper in der Ebene .....	22
3.4.1. Freiheitsgrade des starren Körpers in der Ebene .....	22
3.5. Verbindungen des Körpers in der Ebene .....	23
4. Steif im Raum.....	26
4.1. Freiheitsgrade und Verknüpfungsabhängigkeit von Partikeln im Raum .....	26
4.2. Verbindungen des Körpers im Raum.....	26
5. Koplanare Kraftsysteme, Partikelgleichgewicht .....	28
5.1. Linearkraftsystem - LFS .....	28
5.1.1. Ersetzen des linearen Kraftsystems .....	28

5.2.	Gleichgewicht des linearen Kraftsystems.....	28
5.3.	Zentrales Flächenkraftsystem CPFS .....	29
5.3.1.	Ersatz des zentralen planaren Kraftsystems.....	29
6.	Gleichgewichtszustand des zentralen planaren Kraftsystems.....	31
6.1.	Zentrales Raumkraftsystem - CSFS.....	32
6.1.1.	Ersatz des zentralen Raumkraftsystems.....	32
6.1.2.	Gleichgewicht des zentralen räumlichen Kraftsystems.....	33
7.	Allgemeine Kraftsysteme. Parallele Kraftsysteme. Gleichgewicht der starren Körper. ....	35
7.1.	Allgemeines planares Kraftsystem. Analytische Lösung .....	35
7.2.	Ersetzen von GPFS am ausgewählten Startpunkt .....	36
7.3.	Ersetzen von GPFS durch ein Ergebnis .....	36
7.4.	GPFS Gleichgewichtsbedingungen .....	36
8.	Allgemeines Raumkraftsystem .....	38
8.1.	GSFS am gewählten Startpunkt ersetzen .....	38
8.2.	GSFS Gleichgewichtsbedingungen.....	39
9.	Statische Analyse des Körpersystems.....	41
9.1.	Kinematische und statische Bestimmung von planaren Mehrkörpersystemen ....	41
9.2.	Prinzip der statischen Lösung von Mehrkörpersystemen .....	43
9.3.	Analytische (rechnerische) Lösung von Mehrkörpersystemen .....	43
10.	Planare Stangensysteme.....	46
10.1.	Kinematische Determinierung von Stangensystemen .....	47
10.2.	Statische Lösung von Stangensystemen.....	47
10.3.	Nodalpunktverfahren .....	48
10.4.	Verfahren der Abschnitte .....	48
11.	Schwerpunkt der physikalischen und geometrischen Objekte.....	50
12.	Passiver Widerstand .....	53
12.1.	Passiver Widerstand .....	53
12.2.	Rollwiderstand .....	54
12.3.	Stiftreibungsmoment.....	54
12.4.	Steifigkeit, Unbeweglichkeit der Seile.....	55
12.5.	Faserreibung auf der zylindrischen Oberfläche: .....	55

# I. STATISCHE GRUNDBEGRIFFE, PRINZIPIEN UND AXIOME

## I.1. Grundbegriffe

### Starre Karosserie

es bezieht sich auf einen perfekt starren Körper. Es ist eine Figur, ein Körper, bei dem sich der Abstand zwischen zwei beliebigen, zufällig ausgewählten Punkten durch die Bewegung des Körpers nicht ändert.

### Partikel

physisches Objekt, dessen Abmessungen vernachlässigbar sind. In der Statik bezieht sich der Punkt auf den Punkt eines Starren, in dem das gesamte Gewicht des gesamten Starren konzentriert ist.

### Kraft und Moment

Kraft ist ein grundlegendes Maß für die gegenseitige Wirkung zweier Objekte. Kraft ist eine Vektorgröße. Kraft ist ein Vektor, der mit einer Linie verbunden ist.

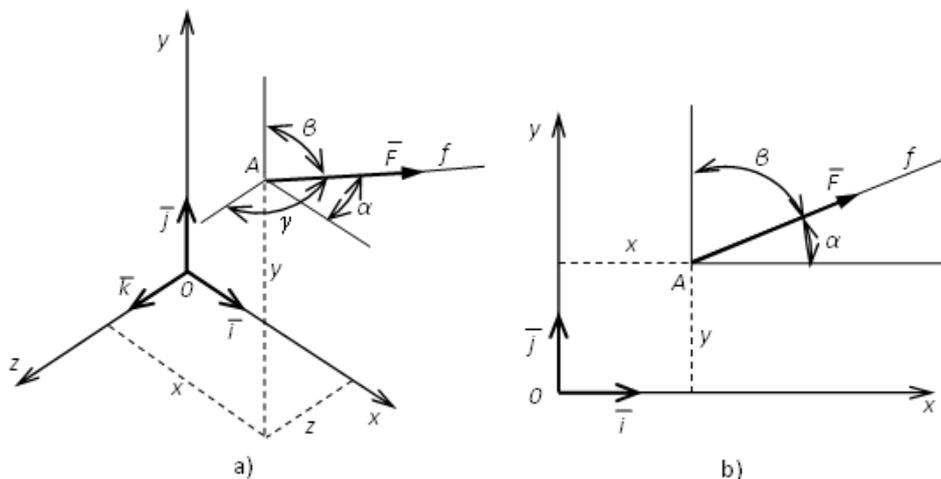


Abbildung 1.1

- Die Kraft im Raum (Abbildung 1.1a) wird durch 6 Parameter bestimmt: Anwendungspunkt  $A(x, y, z)$  - 3 Parameter, Größe  $F$  - 1 Parameter, Position  $f$  und Richtung - Winkel  $\alpha, \beta, (\gamma)$  - 2 unabhängige Parameter, da die Winkel wie folgt miteinander verknüpft sind:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

- Die Kraft in der Ebene (Abbildung 1.1b) wird durch 4 Parameter bestimmt:  $A(x, y)$ ,  $F, \alpha (\beta)$ , seitdem

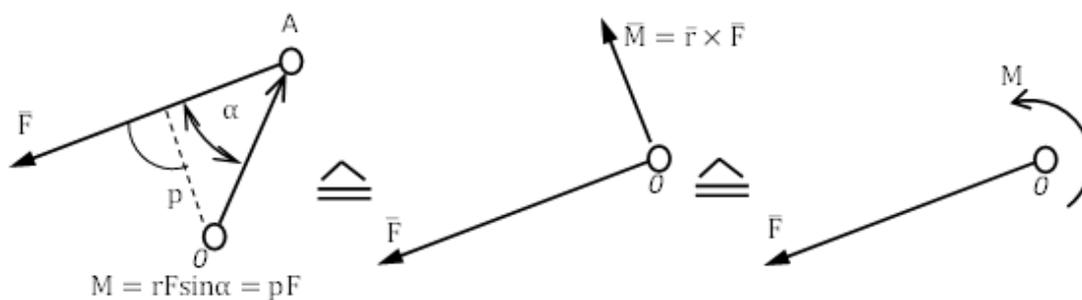
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

### Kraftwirkung:

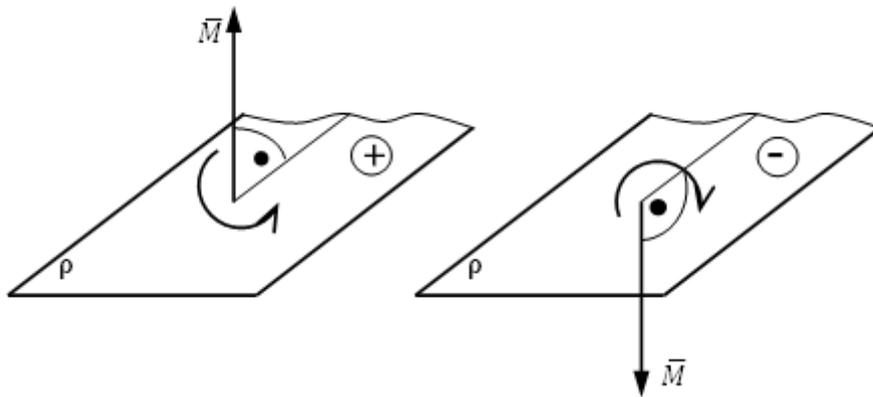
- Gleiten** - identisch für alle Punkte des Objekts, auf die die Kraft wirkt. Sie ist gleich der Kraft,
- Rotation** - unterschiedlich für verschiedene Punkte des Objekts. Die Größe des Rotationseffekts hängt vom senkrechten Abstand zwischen dem Punkt und dem Kraftträger ab und wird durch das Moment zum jeweiligen Punkt bestimmt.

**Moment** - ist ein Vektor, der als Vektorprodukt  $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$  definiert ist. Absolute Größe des Moments zu jedem Punkt, z.B. A entspricht dem Kraftprodukt und dem Momentenarm - seinem senkrechten Abstand zu diesem Punkt (Bild 1.2).



Die Richtung des Momentenvektors ergibt sich aus der Richtung der Drehung der Kraft  $\underline{F}$  zum Punkt A. Das Moment ist positiv, wenn die Drehung gegen den Uhrzeigersinn erfolgt.

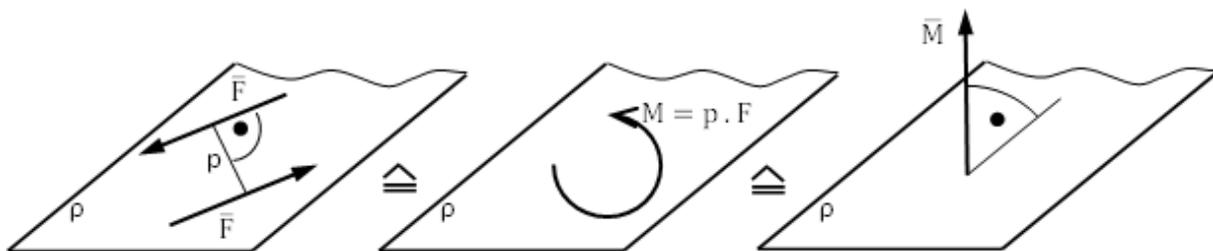
Der Momentenvektor wird als Vektor senkrecht zur Rotationsebene dargestellt. Die Richtung des Vektors wird mit der Rechtsregel bestimmt (Finger der rechten Hand zeigen die Richtung der Drehung an, Daumen zeigt die Richtung des Vektors  $\underline{M}$  an (Bild 1.3).



**Kraftpaar (reines Moment)** - zwei parallele Kräfte, gleich groß x mit unterschiedlicher Wirkungsweise. Das Kraftpaar hat keine Gleitwirkung, sondern nur eine Drehwirkung, die dem Produkt aus einer Kraft und dem senkrechten Abstand zwischen den Kräften entspricht. Die Wirkung des Kraftpaares wird durch sein Moment bestimmt (Bild 1.4).

$$M = \rho \cdot F$$

Der Vektor des Kraftpaarimpulses  $\underline{M}$  ist ein freier Vektor, d.h. er kann frei im Raum bewegt werden und steht senkrecht zur Ebene der Kraftpaarwirkung.



## 1.2. Kraft- und Momenteinheiten

Die Kräfteinheit ist 1 Newton[N]. Es ist eine Kraft, die eine Beschleunigung von  $1\text{ms}^{-2}$  auf 1 kg Gewicht erzeugt, d.h.

$$1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Die Moment Einheit ist  $1\text{N} \cdot \text{m}$  [Nm].

## 1.2.1. Kraftsysteme

- Zwei und mehr Kräfte, die auf ein Objekt wirken, bilden ein Kraftsystem.
- Wenn ein Kraftsystem durch eine Kraft  $\underline{R}$  ersetzt werden kann, wird diese Kraft als resultierendes Kraftsystem bezeichnet. Ein Kraftsystem hat eine Gleitwirkung in Richtung des resultierenden  $\underline{R}$ -Trägers (Bild 1.5).

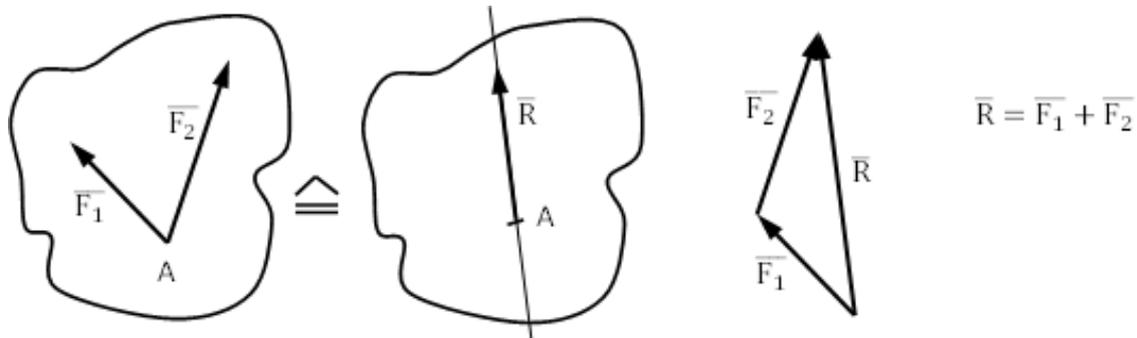


Abbildung 1.5

- Wenn ein Kraftsystem durch ein Moment  $\underline{M}_v$  ersetzt werden kann, wird dieses Moment als resultierendes Moment des gegebenen Kraftsystems bezeichnet. Das Kraftsystem hat somit eine Rotationswirkung in der Ebene senkrecht zum Moment  $\underline{M}_v$  (Bild 1.6).

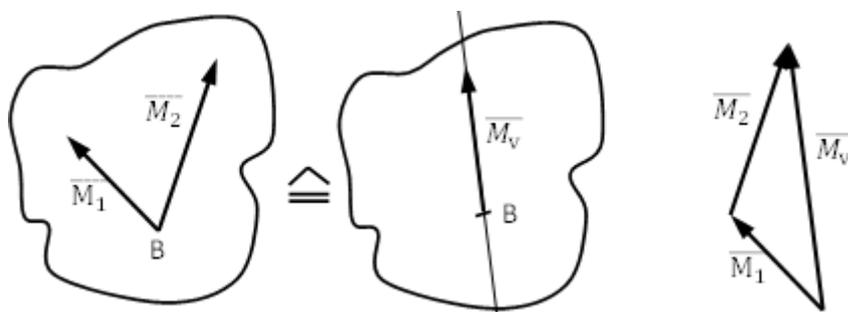


Abbildung 1.6

- Im Allgemeinen hat das Kraftsystem sowohl Gleit- als auch Dreheffekte.
- Das Kraftsystem ist ausgeglichen, wenn der resultierende Gleit- und Rotationseffekt Null ist. Das einfachste ausgewogene Kraftsystem besteht aus zwei Kräften auf einen Träger, die von gleicher Größe und unterschiedlicher Richtung sind (Bild 1.7).

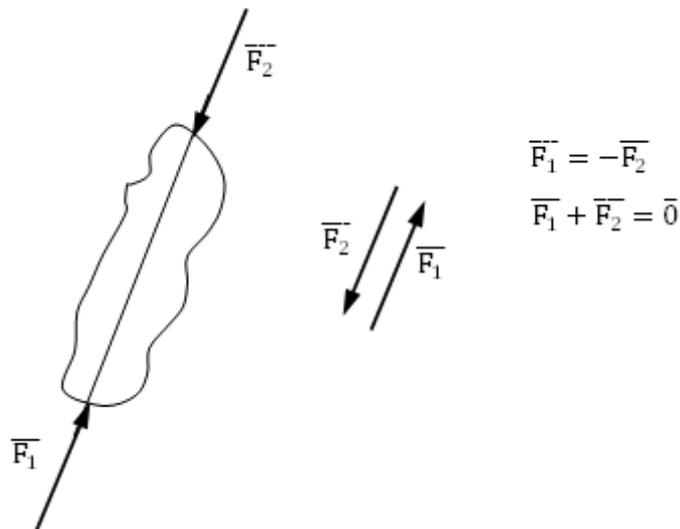


Abbildung 1.7

### 1.3. Klassifizierung von Kräften durch Handeln

Externe Kräfte (Abbildung 1.8a), die die Wirkung der umgebenden Objekte auf das untersuchte Objekt darstellen. Dazu gehören die Belastungskräfte - primäre ( $\underline{F}$ ) und bindende Reaktionen - sekundäre ( $\underline{A}$ ), abhängig von den Belastungskräften,

intern (Abbildung 1.8b), die die Wirkung eines Teils eines starren (Systems) auf ein anderes darstellt ( $\underline{N}_1, \underline{N}_1'$ ). Schnittgrößen werden durch äußere Kräfte verursacht.

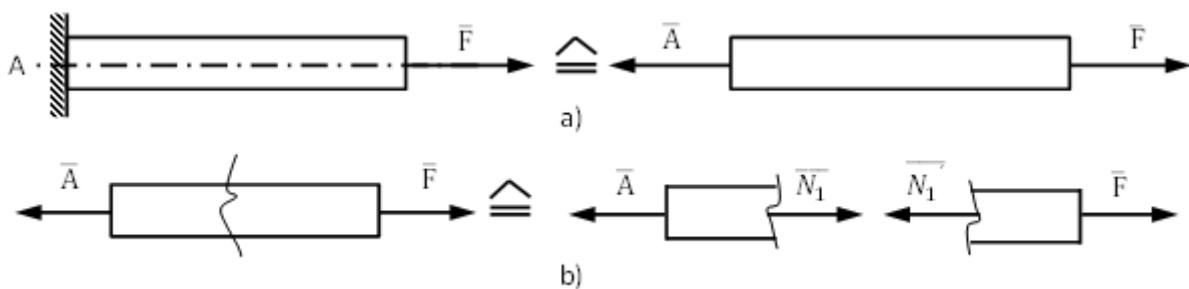


Abbildung 1.8

## 1.4. Zerlegung der Kraft, Kraftkomponenten

Die Kraft  $F$  in einem bestimmten Punkt in einer Ebene kann in zwei Komponenten  $F_1, F_2$  unterteilt werden. Wenn eine Kraft  $F$  und die Richtungen ihrer Komponententräger angegeben werden (bestimmt durch die Winkel  $\alpha, \beta$ ), können wir die Größe der Komponenten  $F_1, F_2$  bestimmen (Abbildung 1.9). Wenn sich aus den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  eine Kraft  $F$  ergibt, dann ist  $\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$

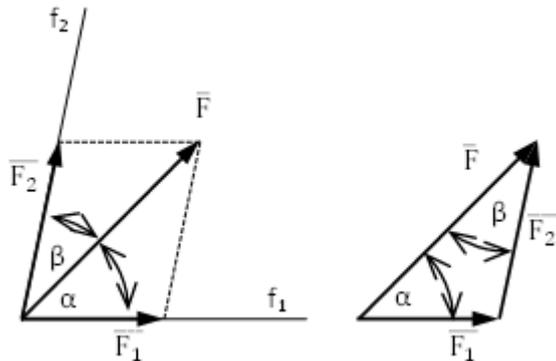


Abbildung 1.9

Im Raum können die Kräfte in drei Komponenten aufgeteilt werden (Bild 1.10a).

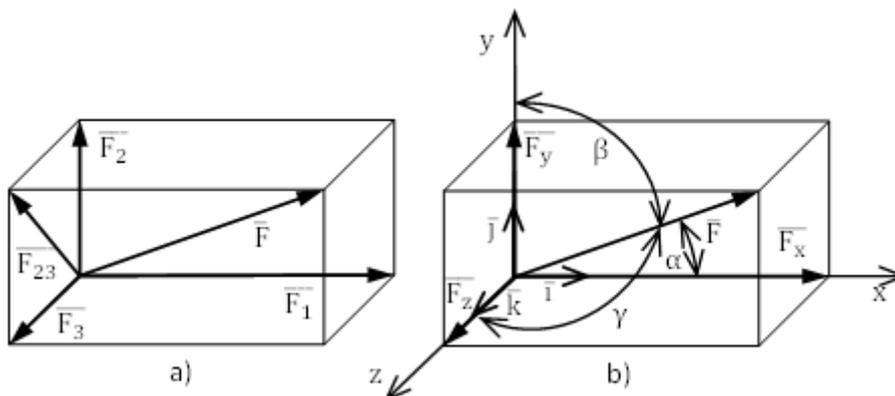


Abbildung 1.10

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_{23}$$

$$\underline{F}_{23} = \underline{F}_2 + \underline{F}_3$$

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$$

Wenn die Kraftkomponenten zueinander senkrecht stehen, können Koordinatenachsen in ihre Richtung positioniert werden. Sie werden mit  $F_x, F_y, F_z$  markiert und als rechtwinklige Komponenten der gegebenen Kraft bezeichnet (Bild 1.10b).

$$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z$$

In einem rechteckigen Koordinatensystem ergeben sich die Größen der Komponenten wie folgt:

$$\begin{aligned} F_x &= \underline{F} \cdot \underline{i} = F \cos \alpha \\ F_y &= \underline{F} \cdot \underline{j} = F \cos \beta \\ F_z &= \underline{F} \cdot \underline{k} = F \cos \gamma \end{aligned} \quad \underline{i}, \underline{j}, \underline{k} - \text{unit vectors}$$

Komponenten können wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \underline{F}_x &= F_x \underline{i} \\ \underline{F}_y &= F_y \underline{j} \\ \underline{F}_z &= F_z \underline{k} \end{aligned}$$

Die resultierende Kraft wird wie folgt beschrieben:

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$$

Wenn wir die Größe der Kraftkomponenten kennen, kann ihre Größe wie folgt berechnet werden:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Und seine Richtung kann mittels der Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ , ( $\gamma$ ) bestimmt werden:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

## I.4.I. Varignon's Theorem

Das Kraftmoment zu einem bestimmten Punkt entspricht der Summe der Komponentenmomente zum gleichen Punkt. Gemäß Abbildung 1.11 ist das Kraftmoment  $\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F}$ .

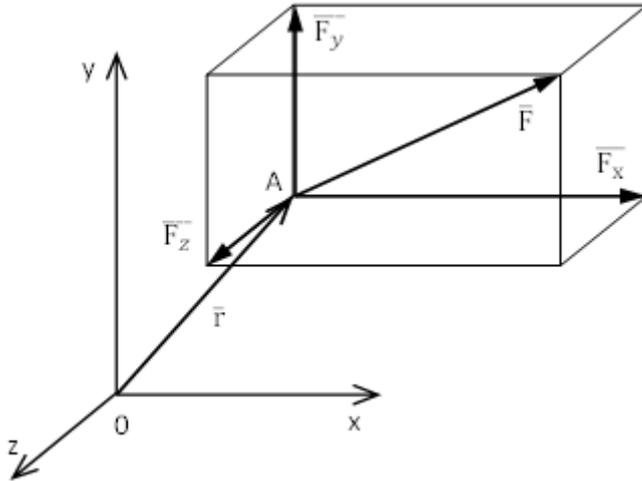


Abbildung 1.11

Das Moment der Kraft  $F$  bis Punkt  $0$  ist  $\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F}$ , weil

$$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z,$$

$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times (\underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z),$$

$$\underline{M}_0 = \underline{r} \times \underline{F}_x + \underline{r} \times \underline{F}_y + \underline{r} \times \underline{F}_z, \text{ a teda}$$

$$\underline{M}_0 = \underline{M}_{0Fx} + \underline{M}_{0Fy} + \underline{M}_{0Fz}.$$

## 1.5. Statische Grundprinzipien und Axiome

Axiom ist ein grundlegender Satz, der ohne Beweise akzeptiert wird. In der Regel basiert es auf experimentellen Erfahrungen.

**Die klassische Mechanik basiert auf drei grundlegenden Newton-Gesetzen:**

- Gesetz der Trägheit (1. Newton-Gesetz)
- Gewererecht (2. Newton-Gesetz)
- Gesetz der Aktionsreaktion (3. Newton-Gesetz)

Die Statik basiert auf den folgenden Axiomen:

### 1.5.1. Axiom der Trägheit (1. Newton-Gesetz)

Ein ruhendes oder gleichmäßiges Objekt bleibt in diesem Zustand, wenn keine äußere Kraft auf es wirkt oder wenn ein ausgewogenes Kraftsystem auf es wirkt.

### 1.5.2. Axiom der Aktionsreaktion (3. Newton-Gesetz)

Für jede Aktion gibt es eine Reaktion von gleicher Größe und unterschiedlicher Richtung. Das bedeutet, dass die Wirkung eines Objekts auf ein anderes gleich ist wie die Wirkung des zweiten Objekts auf das erste, jedoch mit unterschiedlicher Richtung (Bild 1.12).

$$\underline{F_{12}} + \underline{F_{21}} = 0$$
$$\underline{F_{12}} = -\underline{F_{21}}$$

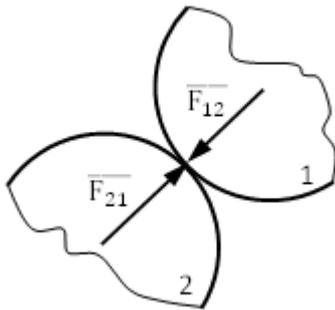


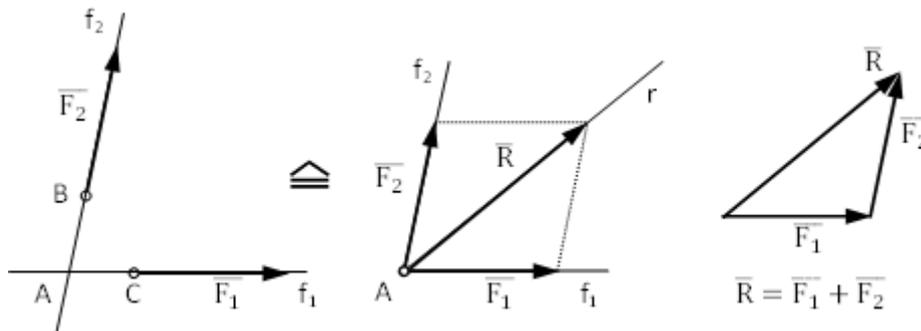
Abbildung 1.12

### 1.5.3. Axiom der konservierenden Wirkung

Die Wirkung eines bestimmten Kraftsystems ändert sich nicht, wenn ein ausgewogenes Kraftsystem hinzugefügt oder entfernt wird.

## 1.5.4. Axiom der Kräfte, die sich zusammensetzen.

Das resultierende  $\underline{R}$  zweier gleichzeitiger Kräfte  $F_1$  a  $F_2$  entspricht der Summe ihrer Vektoren  $\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$  und verläuft durch den Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien (Bild 1.13).



### BEISPIEL 1

Zu Beginn des ausgewählten Koordinatensystems  $0, x, y$  wirkt die Kraft  $F$  der Größe  $F = 6\text{kN}$  (Bild 1.1.1). Die Richtung der Wirkungslinie der Kraft  $F$  ergibt sich aus dem Winkel  $\alpha = 30^\circ$ . Teilen Sie die Kraft  $F$  in ihre Komponenten  $\underline{F}_x, \underline{F}_y$ , deren Wirkungslinien  $f_x, f_y$  identisch sind mit den Achsen des Koordinatensystems  $x, y$ .

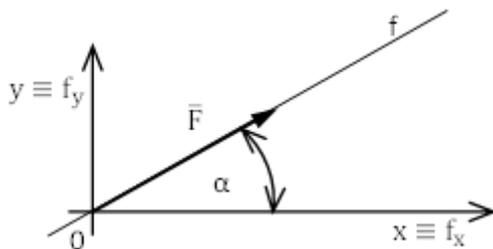


Abbildung 1.1.1

Lösung: Teilen der Kraft  $F$ , die auf der Wirkungslinie  $f$  liegt, deren Zusammensetzungen Ersatz sind durch das äquivalente Kraftsystem  $\underline{F}_x, \underline{F}_y$ , das auf den Wirkungslinien  $f_x, f_y$  liegt. Wenn die Wirkungslinien  $f_x, f_y$  mit den Achsen des Koordinatensystems  $x, y$  identisch sind, dann sind die Kräfte  $\underline{F}_x, \underline{F}_y$  Koordinatenkomponenten der Kraft  $F$  in einem gegebenen Koordinatensystem. Die Lösung basiert auf der Vektorsubstitutionsbedingung (a), bei der die Division der Kraft  $F$  auf verschiedene Weise erfolgen kann.

$$\underline{F} = \underline{F_x} + \underline{F_y}$$

(a)

### Analytische Lösung:

Lösung mittels Richtungswinkeln cosiniert  $\alpha$ ,  $\beta$  der F-Wirkungslinie der Kraft mit der Wirkungslinie der Kraft  $f_x$ ,  $f_y$  (Bild 1.1.2)

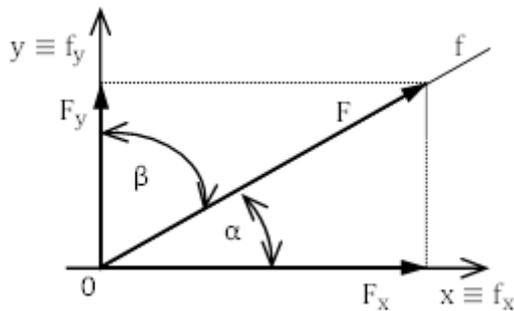
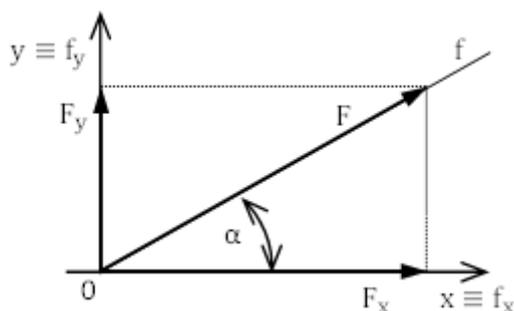


Abbildung 1.1.2

$$\begin{aligned} \beta &= 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \\ F_x &= F \cos \alpha = 6 \cos 30^\circ = 5,196 \text{ kN} \\ F_y &= F \sin \alpha = 6 \sin 30^\circ = 3 \text{ kN} \end{aligned}$$

Eine weitere Lösung ist die Verwendung trigonometrischer Beziehungen eines rechten Dreiecks. Gemäß Abbildung 1.1.3 für die Größen  $F$ ,  $F_x$ ,  $F_y$  gilt das auch:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \cos \alpha = 6 \cos 30^\circ = 5,196 \text{ kN} \\ \sin \alpha &= \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F \sin \alpha = 6 \sin 30^\circ = 3 \text{ kN} \end{aligned}$$



### Grafische Lösung:

Die Kraft  $F$  kann durch das Ersatzkraftsystem  $F_x$ ,  $F_y$  ersetzt werden. Es handelt sich um eine grafische Summe von Kraftvektoren im sogenannten Freikörperdiagramm, wobei die Kraft  $F$  als Ergebnis von zwei gleichzeitigen Kräften mit einem gemeinsamen Angriffspunkt, die in beliebiger Reihenfolge auf ein Freikörperdiagramm angewendet wird,

enterte Linie ist, die vom Ausgangspunkt der ersten Kraft ausgeht und in den Endpunkt der zweiten Kraft eintritt.

Die Lösung basiert auf Figur 1.1.4a, wo wir die bekannte Kraft  $F$  und die Parameter der gesuchten Kräfte zeichnen. Im Falle der Kräfte  $F_x$ ,  $F_y$  sind ihre Wirkungslinien der Kraft bekannt. In dieser Abbildung ist es wichtig, die Vektoren der einzelnen Kräfte (ihre Richtungen) korrekt zu zeichnen. Das Freikörperdiagramm (Abbildung 1.1.4b) wird wie folgt erstellt:

Wir wenden die Kraft  $F$  parallel zur Wirkungslinie der Kraft  $f$  in entsprechend gewählten Kraftgrößen  $m_F$  an. Der Anfangs- und Endpunkt des Kraftvektors  $F$  sind parallele Linien mit Aktionslinien der Kraft  $f_x$ , die in beliebiger Reihenfolge verlaufen. Das Ergebnis ist ein geschlossenes Dreieck, dessen Beine die Größen der gesuchten Kräfte repräsentieren. Die Richtung dieser Kräfte im Freikörperdiagramm ist entgegengesetzt zur Richtung ihres resultierenden  $F$ . Durch Messen der Länge der grafischen Darstellungen der gesuchten Kräfte und deren Vergleich mit dem Kraftmaß wird die tatsächliche Größe dieser Kräfte erzeugt.

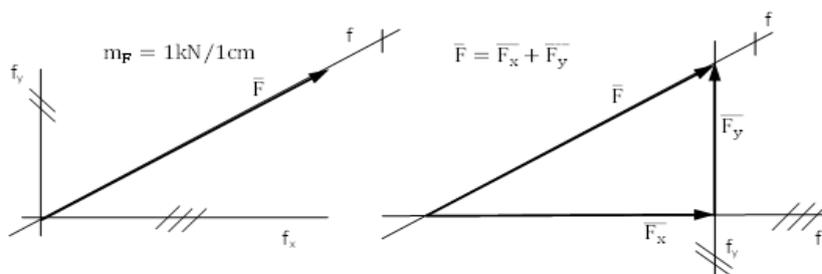


Abbildung 1.1.4

$$F_{xg} = 5,2\text{cm} \Rightarrow F_x = F_{xg}m_F = 5,2\text{kN}$$

$$F_{yg} = 3\text{cm} \Rightarrow F_y = F_{yg}m_F = 3\text{kN}$$

## 2. MOBILITÄT UND VERKNÜPFUNGEN VON MATERIELLEN OBJEKTEN

### 2.1. Links und Linkabhängigkeit

Kraftsysteme wirken auf bestimmte materielle Objekte (Partikel, starrer Körper, System von starren Körpern, System von Partikeln). Materialobjekte können frei in der Ebene oder im Raum platziert werden, d.h. mit unbegrenzter Bewegungsmöglichkeit, oder sie werden durch Verbindungen verbunden, die ihre Bewegungsfähigkeit einschränken. In diesen Verbindungen werden Kräfte erzeugt - so genannte Linkreaktionen.

Die Verbindungen, über die das System an einem stationären starren Körper befestigt ist - dem so genannten Rahmen - sind externe Verbindungen und die darin auftretenden Reaktionen sind externe Reaktionen (Bild 2.1).

Wenn ein mechanisches System (System aus starren Körpern, Partikeln) aus mehreren Objekten besteht, sind die Verbindungen zwischen ihnen innere Verbindungen und Reaktionen in ihnen innere Reaktionen.

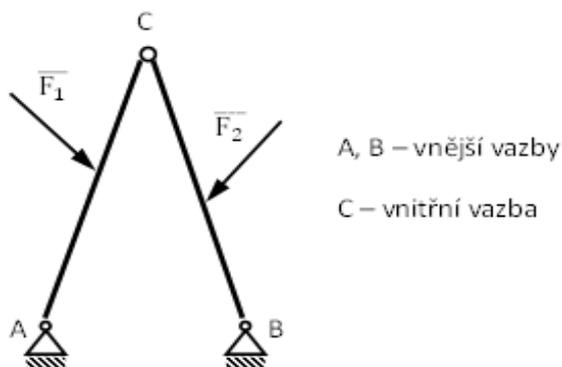


Abbildung 2.1

Die Verknüpfungen reduzieren die Mobilität von materiellen Objekten, während die einzelnen Arten von Verknüpfungen nur bestimmte Objektbewegungen verhindern können. Die Bindungsreaktionen (Sekundärkräfte), die durch die Objektbelastung durch äußere, belastende (Primär-)Kräfte induziert werden, können nur in der Richtung wirken, in der die Glieder die Bewegung verhindern können.

Wenn das Glied die Bewegung nur auf einer Seite verhindert, spricht man von einer einseitigen Bindung (oder Kraft). Figur 2.2a zeigt ein Beispiel für eine Verbindung durch einseitige Verstreben, Figur 2.2b zeigt ein Beispiel für eine Seilverbindung.

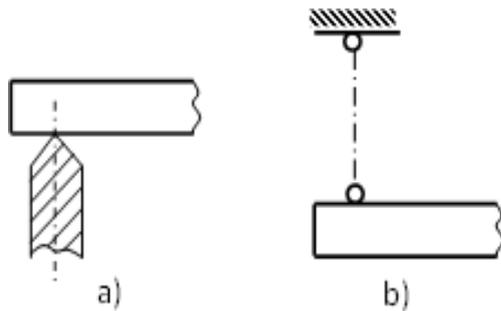


Abbildung 2.2

Wenn das Glied die Bewegung auf beiden Seiten verhindert, spricht man von einem bilateralen Glied. Abbildung 2.3a zeigt ein Beispiel für eine doppelseitige Bindung, Abbildung 2.3b zeigt ein Beispiel für vazyby prutem.

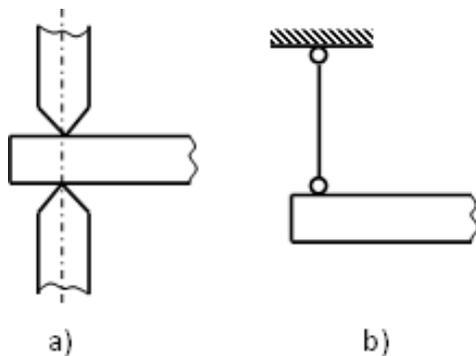


Abbildung 2.3

## 2.2. Grad der Bewegungsfreiheit und Verbindungsabhängigkeit von starren Körpern

Die Anzahl der Freiheitsgrade ist eine Anzahl aller unabhängigen Parameter, die die Objektposition in einer Ebene oder einem Raum bestimmen. Es drückt auch die Anzahl der möglichen Bewegungen aus, die das angegebene Objekt in einer Ebene oder einem Raum ausführen kann.

Die Mobilität oder Immobilität (kinematische Determiniertheit) eines materiellen Objekts wird anhand seiner Verbindungsabhängigkeit bewertet:

$$i = v - u$$

wobei:  $i$  - eine Anzahl von Freiheitsgraden eines materiellen Objekts ist.

$v$  - ist eine Anzahl von Freiheitsgraden eines freien, nicht verbundenen Objekts.  
 $u$  - ist eine Reihe von Freiheitsgraden, die durch Links entfernt werden.

## 2.3. Kinematische und statische Bestimmtheit

Bei der Beurteilung der kinematischen Determiniertheit, d.h. der Mobilität oder Immobilität eines materiellen Objekts, wird die Linkabhängigkeit wie folgt ausgedrückt:

- $i=v-u=0$ , die Aufgabe ist kinematisch bestimmt. Links reduzieren alle Bewegungsmöglichkeiten, die Position des Objekts ist vorgegeben.
- $i=v-u>0$ , ist die Aufgabe kinematisch unbestimmt. Links reduzieren weniger Freiheitsgrade eines freien Objekts. Die Position eines Objekts kann sich ändern.
- $i=v-u<0$ , ist die Aufgabe kinematisch überdeterminiert. Links reduzieren mehr Freiheitsgrade, ihre Position ist überdeterminiert.

Durch die Analyse der statischen Determiniertheit ist es möglich, festzustellen, ob eine ausreichende Anzahl von Bedingungen vorliegt, d.h. Gleichgewichtsbedingungen, um die unbekannt Parameter von Linkreaktionen zu bestimmen. Seit  $v=r$ ;  $u=np$  ist es wahr, dass  $i=i_s$ , können wir gleichzeitig sowohl die kinematische als auch die statische Bestimmtheit von Aufgaben beurteilen:

> die Aufgabe ist kinematisch unbestimmt, statisch überdeterminiert.

$i = i_s = v - u = r - n_p = 0$  die Aufgabe ist kinematisch und statisch bestimmt.

< die Aufgabe ist kinematisch überdeterminiert, statisch undefiniert.

wobei:  $i_s$  – Grad der statischen Bestimmtheit  
 $r$  – Anzahl der unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen  
 $n_p$  – Anzahl der unbekannt Parameter der Linkreaktionen

Statisch unbestimmtes ÚLOHA kann nicht nur mit statischen Methoden gelöst werden. Solche Aufgaben werden in Bezug auf Flexibilität und Festigkeit gelöst, die andere, sogenannte Verformungsbedingungen bestimmen.

# 3.PARTIKEL IN DER EBENE

## 3.1. Freiheitsgrad und Verbindungsabhängigkeit der Partikel in der Ebene

Die Position des freien Teilchens M in der durch das Koordinatensystem 0, x, y (Abbildung 2.4) bestimmten Ebene wird durch zwei unabhängige Parameter  $x_M$ ,  $y_M$  bestimmt. Partikel haben somit zwei Freiheitsgrade  $v=2$ , d.h. sie können zwei unabhängige Bewegungen ausführen (Platzierung der Achsen x und y) und sind Linkabhängig:

$$i = v - u = 2 - u \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix}$$

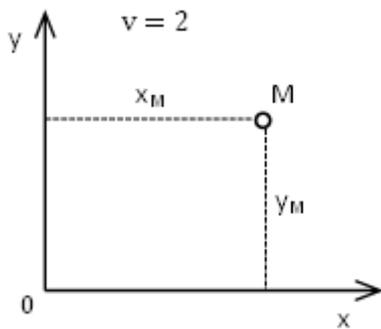


Abbildung 2.4

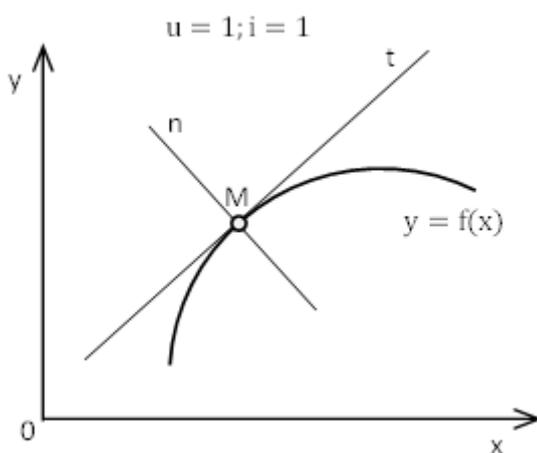


Abbildung 2.5

## 3.2. Verknüpfungen von Partikeln in der Ebene

Partikel in der fixen Ebene zur Kurve  $y=f(x)$  können sich nur tangential bewegen (siehe Bild 2.5). Die Bewegung in Richtung des Normalen wird reduziert, daher sind die möglichen Verbindungsreaktionen bei der Partikelbelastung eine normale Reaktion. Die Position des Partikels wird durch eine Information bestimmt, z.B. durch Koordinate  $x_M$ ;  $[y_M = f(x_M)]$ ; daher hat das mit der planaren Kurve verknüpfte Partikel mindestens einen Grad an Bewegungsfreiheit.

$$u = 1; i = 2 - u = 2 - 1 = 1$$

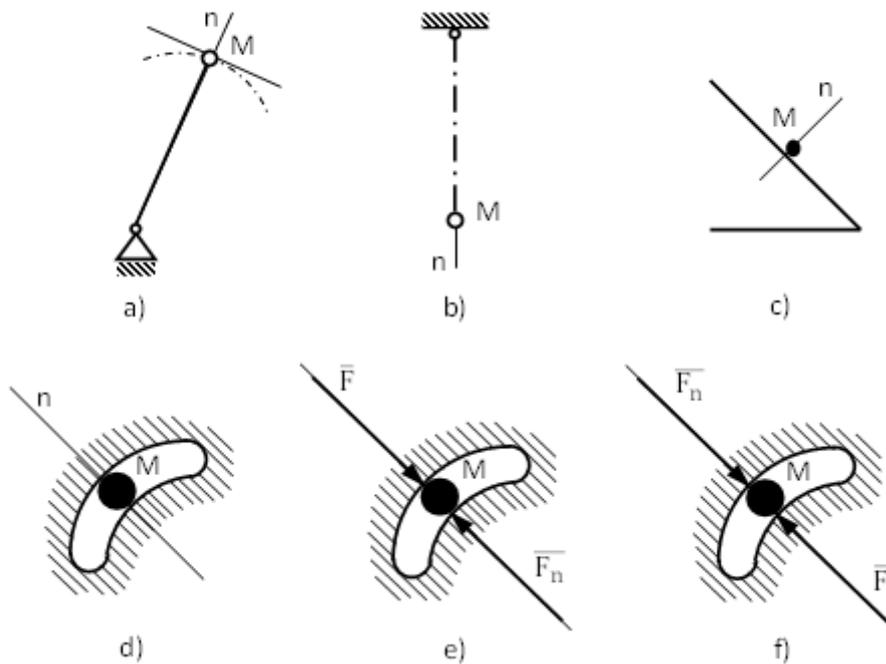
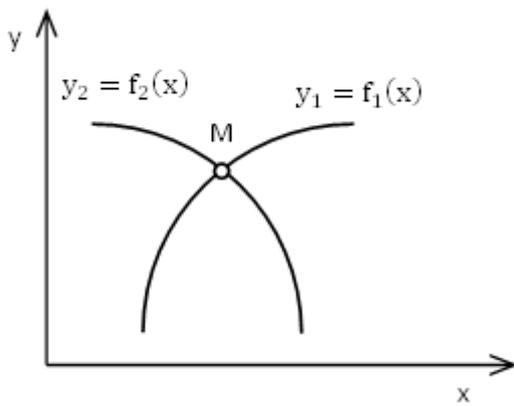


Abbildung 2.6

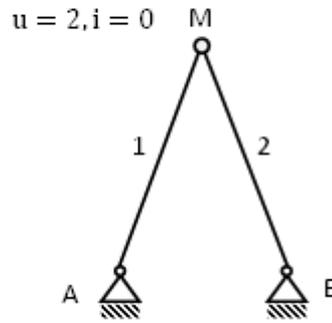
Ein Partikel kann mit einer planaren Kurve durch einen Balken (Abbildung 2.6a) oder eine Nut, z.B. Gleitstück (kámen v kulise), verbunden werden (Abbildung 2.6d). Solche VAZBY sind bilateral (erzwungen) und können eine Reaktion in beide Richtungen hervorrufen (Abbildung 2.6e,f). Seilverbindungen (Abbildung 2.6b) und lehndendes Gestänge (Abbildung 2.6c) nehmen dem Partikel in der Ebene einen Grad an Bewegungsfreiheit, jedoch nur auf einer Seite. Diese werden als einseitige (Kraft-)Verbindungen bezeichnet.

Partikel, die mit zwei Kurven gleichzeitig verbunden sind (Abbildung 2.7a), wurden mit 2 Freiheitsgraden versehen und haben keine Bewegungsmöglichkeit. Eine solche Verbindung kann z.B. durch zwei Balken realisiert werden (Bild 2.7b).

$$u = 2; i = 2 - u = 2 - 2 = 0$$



a)



b)

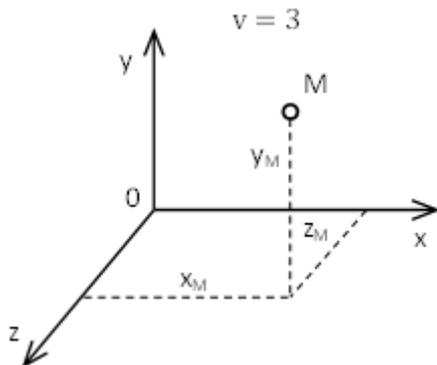
Abbildung 2.7

### 3.3. Partikel im Raum

#### 3.3.1. Freiheitsgrade und Verbindungsabhängigkeit der Partikel im Raum

Die Position eines freien Teilchens M im Raum wird durch 3 Parameter bestimmt. Im orthogonalen Koordinatensystem  $0, x, y, z$  sind dies die folgenden drei Koordinaten:  $x_M, y_M, z_M$  (Bild 2.8). Ein freies Teilchen hat drei Freiheitsgrade im Raum ( $v=3$ ), d.h. es kann drei unabhängige Bewegungen ausführen (Bewegung in Richtung der Achse  $x, y, z$ ) und seine Verbindungsabhängigkeit ist wie folgt:

$$i = v - u = 3 - u \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix}$$



### 3.3.2. Verknüpfungen von Partikeln im Raum

Ein starrer Körper im Raum kann mit der Oberfläche verbunden werden (Abbildung 2.9a), z.B. durch eine Stange oder ein Seil mit einer runden Oberfläche (Abbildung 2.9b), durch Platzieren auf einer Ebene (Abbildung 2.9c) usw. Auf diese Weise nehmen wir einen Grad an Bewegungsfreiheit in Richtung der Normalen zur Oberfläche oder in Richtung einer Stange weg.

$$u = 1, i = 3 - u = 3 - 1 = 2$$

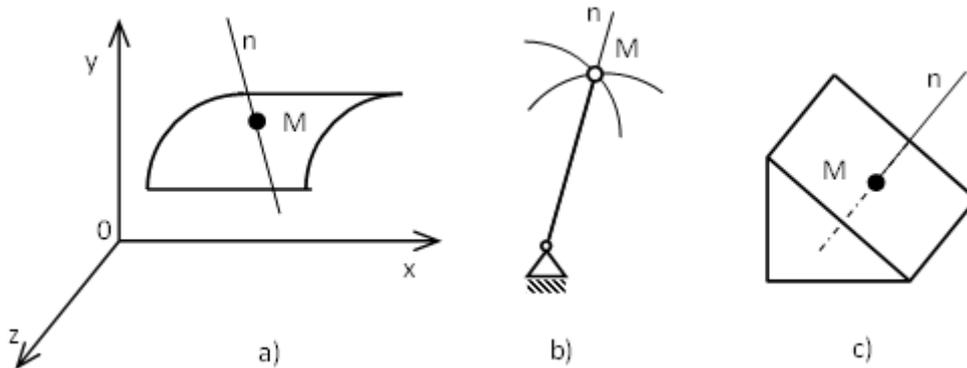


Abbildung 2.9

Wenn wir ein Partikel im Raum mit zwei Oberflächen verbinden (Abbildung 2.10a), nehmen wir zwei Freiheitsgrade der Bewegung weg. Sie ist tatsächlich im Schnittpunkt, d.h. mit der Raumkurve verbunden. Eine Realisierung dieser Verbindung erfolgt z.B. durch zwei Balken (Bild 2.10b).

$$u = 2, i = 3 - u = 3 - 2 = 1$$

Durch die Verbindung eines Teilchens mit drei Oberflächen, die sich in einem bestimmten Punkt schneiden, werden alle drei Freiheitsgrade entfernt. Dies ist z.B. die Verbindung durch drei Balken, die nicht in der gleichen Ebene liegen dürfen. Sie müssen einen sogenannten Lagerblock bilden (Bild 2.11).

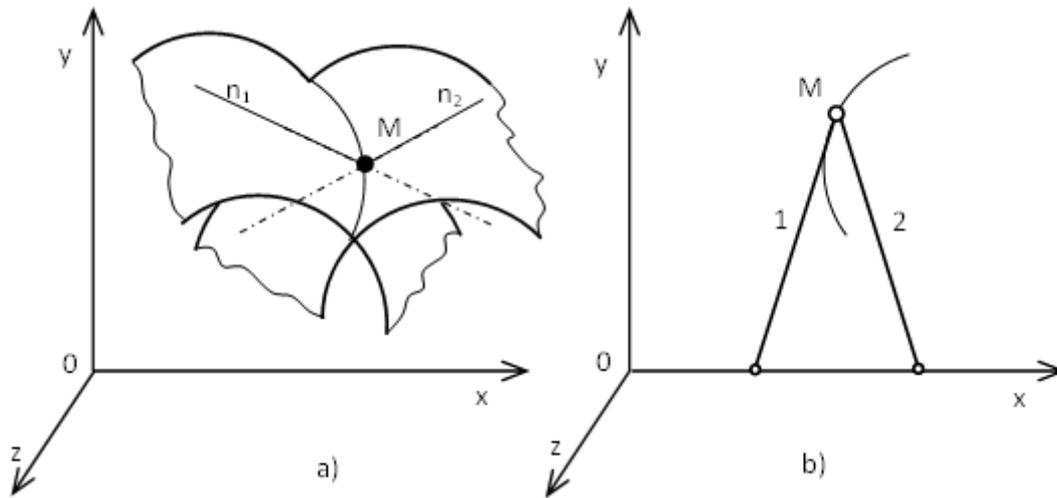


Abbildung 2.10

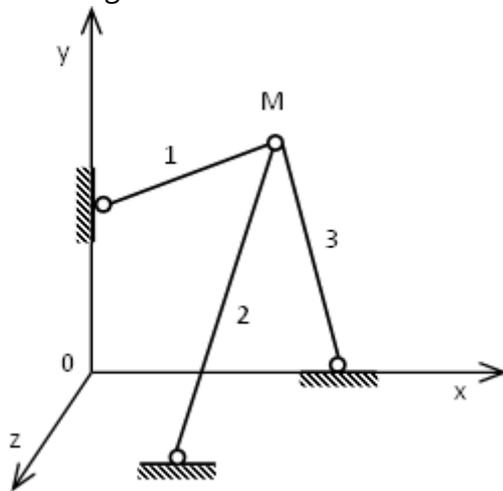


Abbildung 2.11

## 3.4. Steifer Körper in der Ebene

### 3.4.1. Freiheitsgrade des starren Körpers in der Ebene

Die Position eines Starren in der Ebene ( $0, x, y$ ) wird durch drei Parameter bestimmt. Dies können Koordinaten des Punktes A ( $x_A, y_A$ ) und des Winkels  $\varphi$  der Linie sein, die A und B verbindet (Abbildung 2.12), oder zwei Koordinaten des Punktes A und eine Koordinate des Punktes B. Die zweite Koordinate des Punktes B ergibt sich aus der Tatsache, dass der Abstand AB konstant ist.

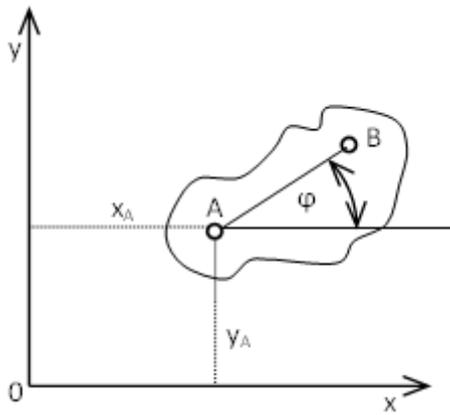


Abbildung 2.12

Ein freier Starrer in der Ebene kann drei unabhängige Bewegungen ausführen: Bewegung in Richtung der Koordinatenachsen  $x$  und  $y$  und Drehung um einen beliebigen Punkt (A oder B). Ein starrer Körper in der Ebene hat drei Freiheitsgrade der Bewegung und seine Verbindungsabhängigkeit wird wie folgt ausgedrückt:

$$i = v - u = 3 - u \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix}$$

### 3.5. Verbindungen des Körpers in der Ebene

Durch die einzelnen Links ist es möglich, einen, zwei oder drei Freiheitsgrade zu entfernen. In jeder Verbindung kann je nach Art des Lastkraftsystems eine Vernetzungsreaktion auftreten.

Links, die eine gewisse Mobilität hinterlassen, werden als kinematische Paare bezeichnet. Sie können kinematische Paare der ersten ( $u = 1$ ) oder zweiten Klasse ( $u = 2$ ) sein.

Ein höheres, allgemeines kinematisches Paar entfernt einen Freiheitsgrad ( $u = 1$ ).

In einer (Verknüpfung durch Lehnen) lehnt sich ein starrer Partikel mit seiner Kante an die Oberfläche eines anderen Partikels an, während die Oberflächen der starren Partikel vollkommen starr sein müssen. Die entfernte Bewegungsmöglichkeit und die mögliche Reaktion liegen im gemeinsamen Normalzustand (Abbildung 2.13a).

Ein gewisser Grad an Bewegungsfreiheit wird durch ein weiteres starrer Partikel, das sogenannte Binärelement, aufgehoben. Das binäre Element dient als Verbindungsmittel zwischen einem Rahmen und einem Partikel, mit dem es durch eine Dreh- oder Schieberverbindung verbunden ist. Es wird nicht durch äußere Kräfte belastet, nur die Reakti-

Teilchens und eines Rahmens, die auf dem gleichen Kraftträger liegen, wirken darauf ein, dass es von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung ist. Solche binären Elemente, die als Verbindungen eines Teilchens zu einem Rahmen verwendet werden, sind:

- **Gleitlager (Abbildung 2.13b)** - Gelenk auf der einen Seite, bewegliches Gestänge auf der anderen Seite. Der gemeinsame Träger muss über die Verbindung gehen. Die Verbindung muss einseitig oder bilateral sein.
- **Stange (Abbildung 2.13c)** - Gelenke auf beiden Seiten, gemeinsamer Träger ist in deren Verbindung. Die Verbindung ist beidseitig, die Stange kann gezogen oder geschoben werden (Bild 2.13d).

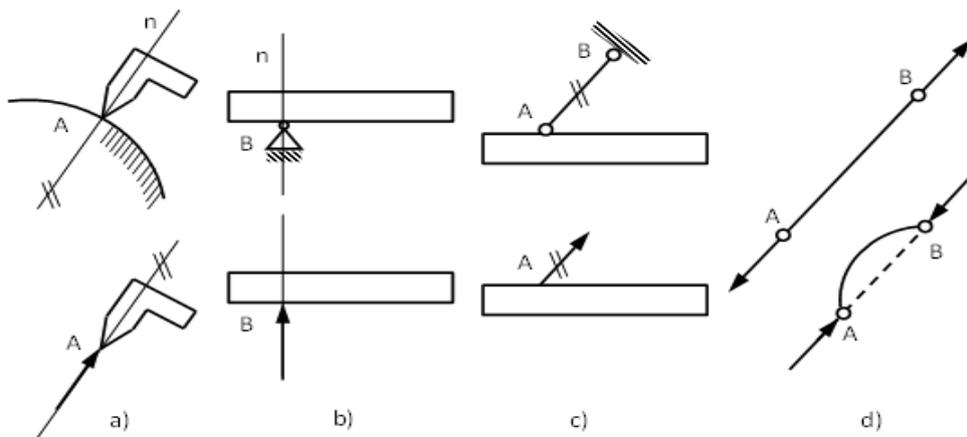
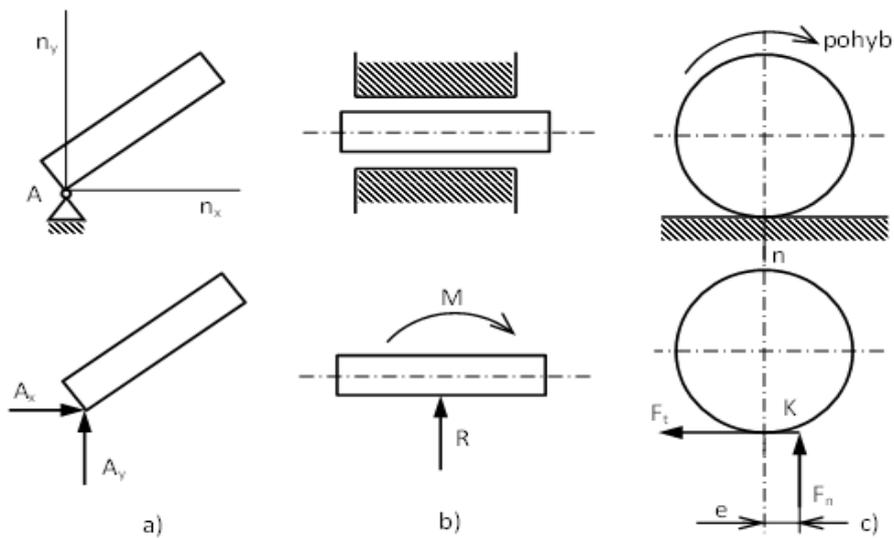


Abbildung 2.13

**Untere kinematische Paare ( $u = 2$ ) entfernen zwei Grad der Bewegungsfreiheit. Sie enthalten die folgenden Links:**

- **Die Drehverbindung** (Gelenk) (Abbildung 2.14a) entfernt zwei Bewegungen in Richtung der Achsen  $x$  und  $y$ . Zwei Parameter sind unbekannt, z.B. Größe und Richtung der Reaktion. Die Verbindung gibt dem Partikel die Möglichkeit, sich um den festen Mittelpunkt der A-Rotation zu drehen.
- **Die Schieberverbindung** (Abbildung) hinterlässt eine Bewegungsmöglichkeit in eine Richtung und beseitigt eine Bewegungsmöglichkeit in eine senkrechte Richtung und die Möglichkeit der Drehung in der Ebene. Die unbekannt Parameter sind Kraft und Momentengröße.
- **Rolling Link** (Abbildung) wird durch die Reibung zwischen den Teilchen bestimmt, entfernt die Möglichkeit von zwei Bewegungen - in Richtung einer normalen und tangentialen (Reaktion  $F_N$  a  $F_T$ ), ermöglicht eine scherfreie Rollbewegung, dh eine Möglichkeit der Drehung des Teilchens.

$$u = 2, i = 3 - u = 3 - 2 = 1$$



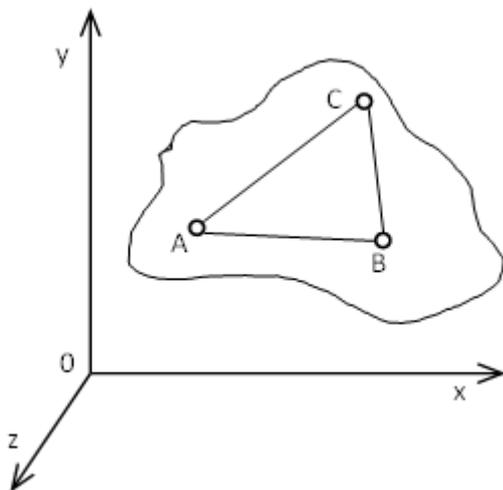
Ein Partikel kann mit anderen Partikeln starr fixiert werden, z.B. mit einem Rahmen durch eine so genannte Rückhalteeinrichtung (Bild 3.7), die alle drei Freiheitsgrade der Bewegung aus dem Partikel in der Ebene entfernt.

## 4. STEIF IM RAUM

### 4.1. Freiheitsgrade und Verknüpfungsabhängigkeit von Partikeln im Raum

Die Position eines Starren im Raum  $O, x, y, z$  wird durch sechs Parameter bestimmt. Dies können 3 Koordinaten des Punktes A, zwei Koordinaten des Punktes B und eine Koordinate des Punktes C sein (Abbildung). Andere Koordinaten der Punkte B und C sind durch feste Abstände zwischen den Punkten verbunden. Für ein Partikel im Raum ist es  $v = 6$ . Ein freies Teilchen im Raum hat die Möglichkeit von sechs unabhängigen Bewegungen: Bewegung in Richtung der Achsen  $x, y$  und  $z$  und Drehung um diese drei Koordinatenachsen. Es verfügt über sechs Freiheitsgrade und ist wie folgt abhängig:

$$i = v - u = 6 - u \quad \begin{array}{l} > \\ = 0 \\ < \end{array}$$

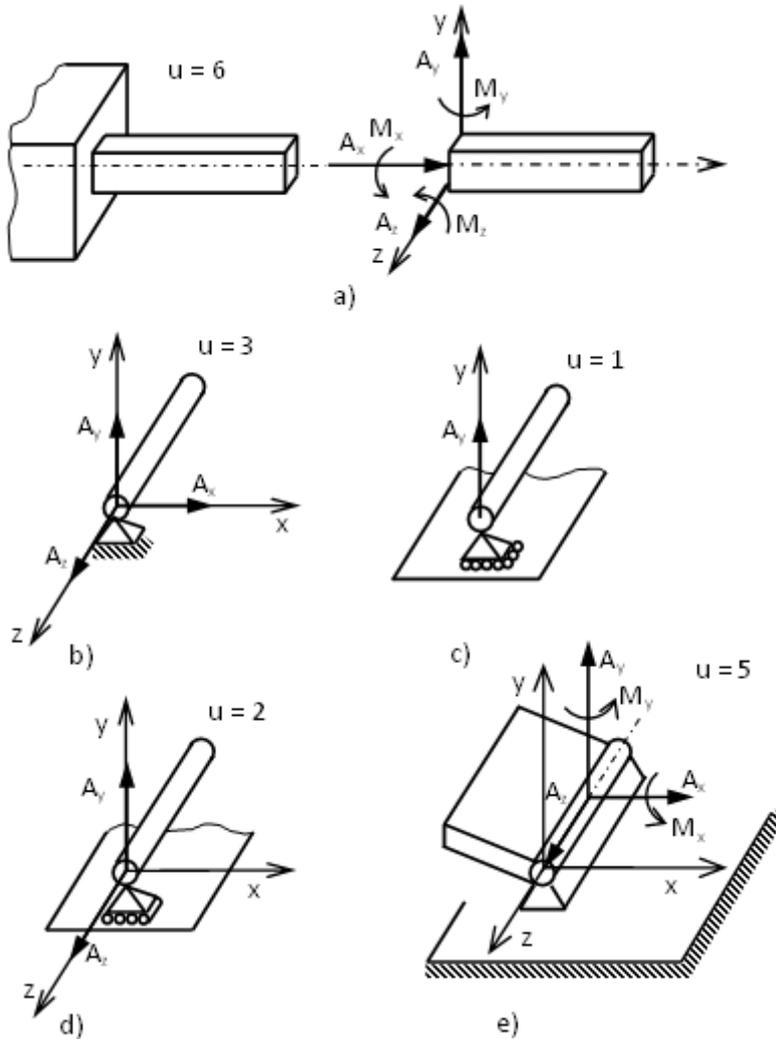


### 4.2. Verbindungen des Körpers im Raum

- Je nach Art der Verbindung ist es möglich, 1 - 6 Grad der Bewegungsfreiheit zu entfernen. Die Abbildung zeigt einzelne Arten von Verbindungen eines Körpers im Raum mit deutlichen Veränderungen, die nach dem Laden des Körpers auftreten können:
- Ein Grad an Bewegungsfreiheit ( $u = 1$ ) wird durch ein Gelenk durch Gleitlager auf Rollen (Bild c) und ein Gelenk durch eine Stange entfernt.
- Zwei Freiheitsgrade ( $u = 2$ ) werden durch ein Gelenk durch Gleitlager auf Bolzen entfernt (Bild d).
- Drei Freiheitsgrade ( $u = 3$ ) werden durch die Verbindung durch ein räumliches

entfernt (Bild b).

- Fünf Freiheitsgrade ( $u = 5$ ) werden durch eine sogenannte Verbindung durch ein zylindrisches Gelenk entfernt (Bild e).
- Feste Verbindung - durch Rückhalteeinrichtung (Abbildung a) entfernen wir alle sechs Bewegungsfreiheitsgrade ( $u = 6$ ).

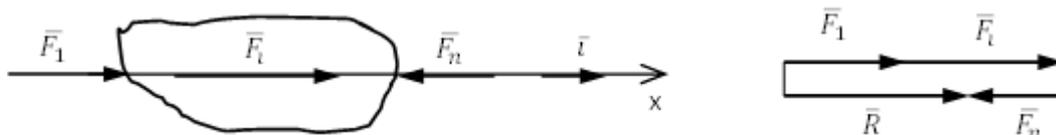


# 5. KOPLANARE KRAFTSYSTEME, PARTIKELGLEICHGEWICHT

## 5.1. Linearkraftsystem - LFS

### 5.1.1. Ersetzen des linearen Kraftsystems

Wenn alle Kräfte in einer Linie auf das gegebene Objekt wirken, können sie durch eine Kraft  $R$  (resultierend) ersetzt werden, deren Wirkungslinie identisch ist mit der Wirkungslinie aller Kräfte. Die Achse  $x$  mit einem Einheitsvektor  $\underline{i}$  stellt eine Wirkungslinie der Kraft  $F_i$  dar (Abbildung).

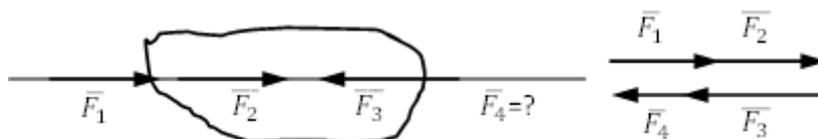


Wenn  $\underline{R} = R \cdot \underline{i}$ ,  $\underline{F}_i = F_i \cdot \underline{i}$ , dann  $R \cdot \underline{i} = \sum F_i \cdot \underline{i}$ . Die resultierende Größe entspricht der algebraischen Summe der Kräfte  $\underline{R} = \sum \underline{F}_i$ .

## 5.2. Gleichgewicht des linearen Kraftsystems

Die Bedingung für das LFS-Gleichgewicht ist  $\underline{R} = \underline{0}$ , also  $\sum F_i = 0$ .

In der Grafik ist diese Gleichung als geschlossene, sogenannte SILOVÝ OBRAZEC gekennzeichnet (Abbildung).



In der analytischen Lösung wird die Gleichgewichtsbedingung in skalarer Form durch eine Kraft-Gleichgewichtsbedingung  $R = 0$  ausgedrückt, d.h.  $\sum F_i = 0$ .

Das LFS-Gleichgewicht kann auch unter Verwendung der Momentenbedingung zu einem beliebigen Punkt B (Abbildung) ausgedrückt werden, der nicht auf der Wirkungslinie der LFS liegt.

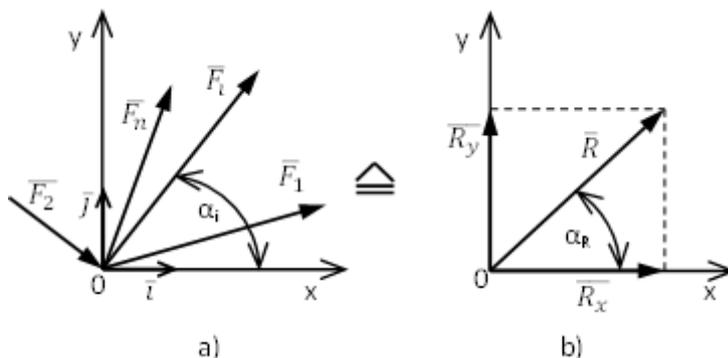
$$\sum M_{iB} = p \sum F_i = 0$$

Für das lineare Kraftsystem gibt es nur eine unabhängige statische Bedingung, d.h. aus statischen Gleichgewichtsbedingungen kann nur ein unbekannter Parameter berechnet werden.

## 5.3. Zentrales Flächenkraftsystem CPFS

### 5.3.1. Ersatz des zentralen planaren Kraftsystems

Alle Kräfte  $F_i$  des gegebenen Kraftsystems durchlaufen den Punkt 0 und liegen in einer Ebene 0, x, y (Abbildung a). Auf diese Weise kann das Kraftsystem durch das resultierende  $R=S$  ersetzt werden, das durch den Punkt 0 geht (Abbildung b).

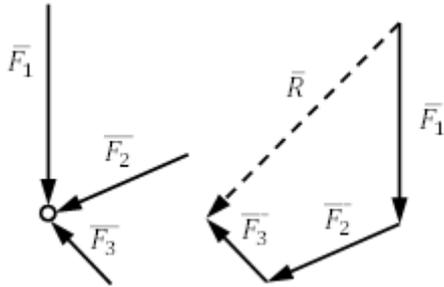


$$\underline{R} = \sum \underline{F}_i$$

- Nach der Expression der Kraftvektoren über ihre Komponenten ergibt sich  $R_x \cdot \underline{i} + R_y \cdot \underline{j} = \sum F_{ix} \cdot \underline{i} + \sum F_{iy} \cdot \underline{j}$ .
- Wenn wir die Gleichung  $R_x \cdot \underline{i} + R_y \cdot \underline{j} = \sum F_{ix} \cdot \underline{i} + \sum F_{iy} \cdot \underline{j}$  mit den skalaren Einheitsvektoren  $\underline{i}$  und  $\underline{j}$  multiplizieren, werden die Bedingungen für das Ersetzen von CPFS durch zwei skalare Gleichungen ausgedrückt:  $R_x = \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i$  und  $R_y = \sum F_{iy} = \sum F_i \sin \alpha_i$ . Die Größe und Richtung des Ergebnisses ist also  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ ,  $\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R}$ .

In der Grafik durchläuft das resultierende  $\underline{R}$  die Mitte der Kräfte 0 (Abbildung) und wird durch ihre Vektorsumme im sogenannten Kraftmuster bestimmt.

$$\underline{R} = \sum \underline{F}_i$$
$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$$



# 6. GLEICHGEWICHTSZUSTAND DES ZENTRALEN PLANAREN KRAFTSYSTEMS

Die Gleichgewichtsbedingung ist  $R=0$ , also  $F_i=0$ .

- In der analytischen Lösung können zwei unabhängige Gleichgewichtsbedingungen entweder durch zwei Komponentengleichungen ausgedrückt werden oder die Komponentengleichungen können durch Impulse ersetzt werden (mit dem Satz Varignon's).
- Alternative: Komponentengleichungen

$$R_x = 0, \text{ that is } \sum F_{ix} = 0$$

$$R_y = 0, \text{ that is } \sum F_{iy} = 0$$

- 2. Alternative: Impulsgleichungen

$$\left( \sum M_i \right)_A = 0$$

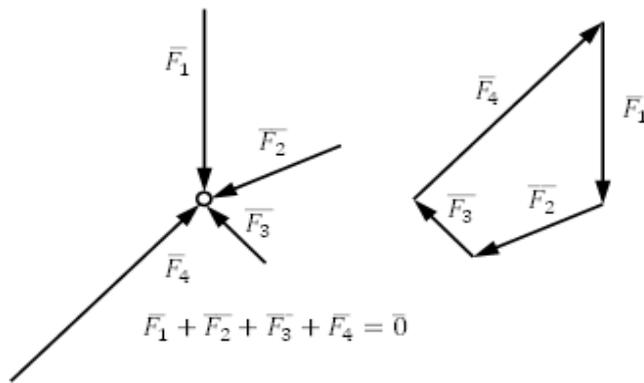
$$\left( \sum M_i \right)_B = 0$$

- Die Punkte A, B und die Mitte der Kräfte 0 dürfen nicht auf einer Linie liegen!
- Alternative 3: 1 Komponente und 1 Impulsgleichung

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\left( \sum M_i \right)_B = 0$$

- Der Punkt B darf nicht auf der Achse x liegen! Die Verbindungslinie der Mitte der Kräfte mit dem Punkt B darf nicht senkrecht zur Achse stehen, in der die Kräfte dargestellt werden.
- In der Graphenlösung (Abbildung) ist die Grundlage die Bedingung des Schließkraftmusters mit den Kräften, entsprechend der Vektorgleichgewichtsbedingung  $R=0$ .

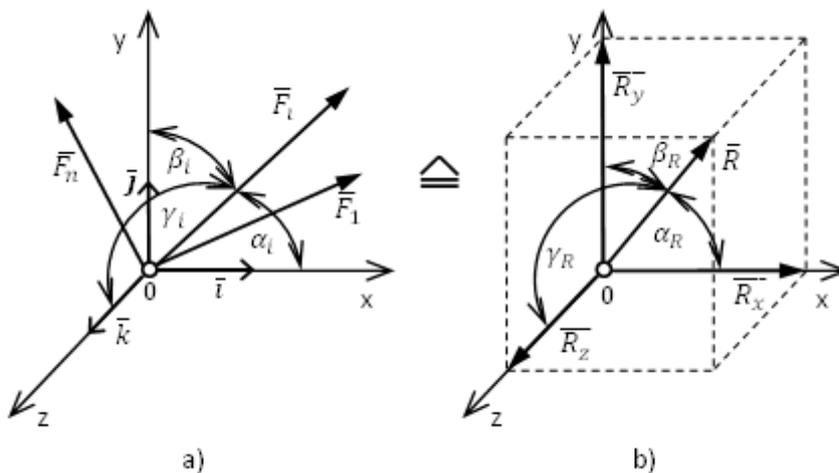


Für CPFS können nur zwei statische Bedingungen geschrieben werden, aus denen wir zwei unbekannte Parameter berechnen können.

## 6.1. Zentrales Raumkraftsystem - CSFS

### 6.1.1. Ersatz des zentralen Raumkraftsystems

An einem Punkt wirkt das zentrale Raumkraftsystem  $n$ . Jede Kraft dieses Systems wird durch ihre Größe und Richtung bestimmt (Abbildung a). Alle Kräfte können durch eine Kraft ersetzt werden, die resultierende  $R$  (Abbildung b), die durch das gemeinsame Zentrum der Kräfte hindurchgehen muss. Die daraus resultierende Kraft  $R$  ersetzt das angegebene CSFS vollständig.



In einem rechteckigen Koordinatensystem  $0, x, y, z$  kann das resultierende  $R$  in die Komponenten  $\underline{R}_x, \underline{R}_y, \underline{R}_z$  unterteilt werden (Abbildung).

$$\underline{R} = \underline{R}_x + \underline{R}_y + \underline{R}_z$$

Die Bedingungen für den Austausch von CSFS sind Beziehungen zur Bestimmung des Ergebnisses:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i \\ R_y &= \sum F_{iy} = \sum F_i \cos \beta_i \\ R_z &= \sum F_{iz} = \sum F_i \cos \gamma_i \end{aligned}$$

Die resultierende Größe ist  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ .

Die Position des Ergebnisses wird berechnet als:  $\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R}$ ,  $\cos \beta_R = \frac{R_y}{R}$ ,  $\left( \cos \gamma_R = \frac{R_z}{R} \right)$ .

## 6.1.2. Gleichgewicht des zentralen räumlichen Kraftsystems

CSFS wird ausgeglichen, wenn das resultierende R Null ist. (Dies bedeutet, dass der resultierende Gleit- und Rotationseffekt zu jedem Punkt im Raum gleich Null ist).

- **Alternative: Komponentengleichung**

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \\ \sum F_{iz} &= 0 \end{aligned}$$

- **Alternative 2: Impulsgleichungen**

Auf der Grundlage des Varignon's Theorems können die Gleichgewichtsbedingungen auch durch Impulsgleichungen in Bezug auf beliebige Achsen im Raum ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} \left( \sum M_i \right)_a &= 0 \\ \left( \sum M_i \right)_b &= 0 \\ \left( \sum M_i \right)_c &= 0 \end{aligned}$$

Keine der Achsen a, b oder c kann durch das gemeinsame Zentrum des Kraftsystems verlaufen, und die Achsen a, b, c können sich nicht in einem Punkt treffen oder parallel zueinander sein.

- **Alternative 3: 2 Impulse und 1 Komponentengleichung**

$$\left(\sum M_i\right)_a = 0$$

$$\left(\sum M_i\right)_b = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0$$

Die Achsen a, b dürfen nicht durch die Mitte des Kraftsystems führen. Sie können sich nicht in der Ebene schneiden, die durch die Mitte des CSFS verläuft und senkrecht zur Achse x steht. Die Achsen a, b dürfen nicht parallel sein, wenn sie gleichzeitig parallel zur oben genannten Achse sind.

- **Alternative 4: 2 Komponenten und 1 Impulsgleichung**

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

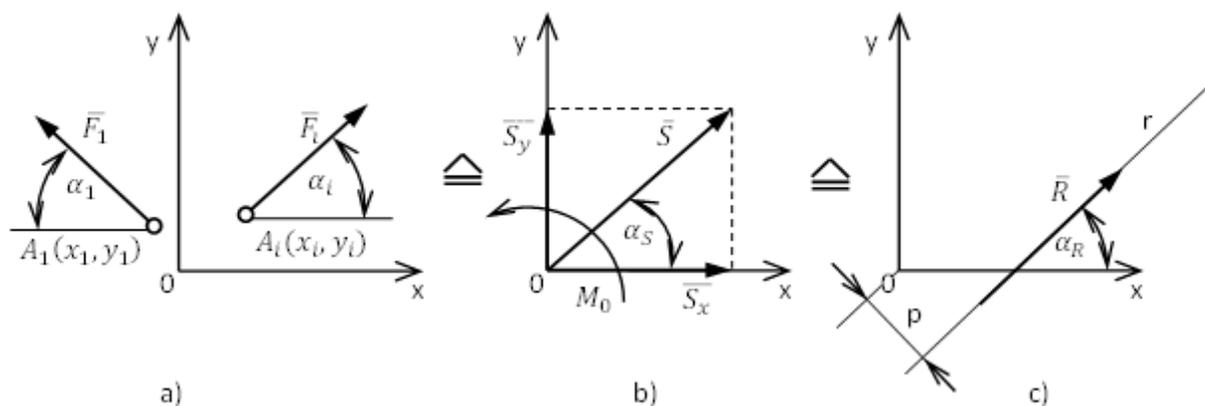
$$\left(\sum M_i\right)_a = 0$$

Die Achse a kann nicht durch die Mitte des CSFS verlaufen und darf nicht senkrecht zu dem durch die Achsen x, y bestimmten Raum stehen

Wie in der Ebene, im Raum in Bezug auf die analytische Lösung gehen wir immer von der Orientierung unbekannter Kräfte aus. Wenn das Ergebnis positiv (+) ist, war die angenommene Ausrichtung / Richtung richtig, wenn es negativ (-) ist, ist die tatsächliche Ausrichtung der Kraft entgegengesetzt zur angenommenen.

# 7. ALLGEMEINE KRAFTSYSTEME. PARALLELE KRAFTSYSTEME. GLEICHGEWICHT DER STARREN KÖRPER.

## 7.1. Allgemeines planares Kraftsystem. Analytische Lösung



Das allgemeine planare Kraftsystem besteht aus Kräften, die in der Ebene verteilt sind (z.B. in der Ebene  $x, y$  dargestellt in Figur a). Die Wirkung jeder Kraft  $F$  am Anfang eines Koordinatensystems  $0, x, y$  ist sowohl gleitend  $F_i$  als auch drehend  $M_{i0}$ . Die resultierende Gleit- und Dreheffekt des Kraftsystems zum Ausgangspunkt in Punkt  $0$  ist (Abbildung):

$$\underline{S} = \sum \underline{F}_i$$

$$\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_{i0}$$

Es kann folgende Fälle geben:

- $\underline{S} \neq \underline{0}, \underline{M}_0 \neq \underline{0}$  - das resultierende System ist  $R$  - nicht über den Punkt  $0$  hinaus.
- $\underline{S} \neq \underline{0}, \underline{M}_0 = \underline{0}$  - das resultierende System ist  $R$  - durch den Punkt  $0$  hindurch.
- $\underline{S} = \underline{0}, \underline{M}_0 \neq \underline{0}$  - das System wird durch ein Kraftpaar in der Ebene  $x, y$  ersetzt.
- $\underline{S} = \underline{0}, \underline{M}_0 = \underline{0}$  - Bedingungen für das GPFs-Gleichgewicht

## 7.2. Ersetzen von GPFS am ausgewählten Startpunkt

Die Größe des Impulses  $M_{i0}$  wird durch den Varignon-Satz ausgedrückt (Abbildung a).

$$M_{i0} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}$$

GPFS am gewählten Startpunkt  $\acute{e}$  (Abbildung b) kann durch drei skalare Gleichungen ersetzt werden:

$$S_x = \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i$$

$$S_y = \sum F_{iy} = \sum F_i \sin \alpha_i$$

$$M_0 = \sum M_{i0} = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = \sum F_i (x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i) = \sum F_i p_i$$

## 7.3. Ersetzen von GPFS durch ein Ergebnis

$S$  und  $M_0$  wird durch das resultierende  $R$  ersetzt, wobei  $R=S$  und  $S=R$  vom Startpunkt  $O$  um den Abstand  $p$  verschoben sind (Abbildung c). Die Größe der resultierenden Größe wird wie folgt berechnet:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \text{ wobei}$$

$$R_x = S_x = \sum F_{ix}$$

$$R_y = S_y = \sum F_{iy}$$

Der Winkel  $R$  und die Position  $p$  werden wie folgt berechnet

$$\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R}, p = \frac{M_0}{R}$$

## 7.4. GPFS Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen  $S=0$ ,  $M_0=0$  werden durch drei Gleichgewichtsskalargleichungen bestimmt:

- **Alternative: 2 Komponentengleichungen, 1 Impulsgleichung**

$$R_x = 0, \quad \sum F_{ix} = 0$$

$$R_y = 0, \quad \Rightarrow \quad \sum F_{iy} = 0$$

$$M_0 = 0, \quad \sum M_{i0} = 0$$

- **Alternative 2: 3 Impulsgleichungen**

$$\left(\sum M_i\right)_A = 0$$

$$\left(\sum M_i\right)_B = 0$$

$$\left(\sum M_i\right)_C = 0$$

Die Punkte A, B, C dürfen nicht in einer Linie liegen, da diese Linie als Ergebnis wirken könnte und die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt wären.

- **Alternative 3: 2 Impulse und 1 Komponentengleichung**

$$\left(\sum M_i\right)_A = 0$$

$$\left(\sum M_i\right)_B = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0$$

Die Verbindungslinie der Punkte A, B darf nicht senkrecht zur Achse x stehen (zur Achse, in deren Richtung wir die Kraftformel schreiben), sonst könnte das Ergebnis auf dieser Linie liegen und die Gleichgewichtsbedingungen würden erfüllt sein.

# 8. ALLGEMEINES RAUMKRAFTSYSTEM

Das allgemeine räumliche Kraftsystem besteht aus Kräften, die zufällig im Raum verteilt sind. Es ist die allgemeinste Art von Kraftsystem, für die es gilt:

$$\underline{S} \neq \underline{0}, \underline{M}_0 \neq \underline{0}, \underline{S} \cdot \underline{M}_0 \neq 0$$

Wenn S und M0 im Allgemeinen nicht senkrecht zueinander stehen, kann die GSFS nicht durch ein Ergebnis ersetzt werden.

## 8.1. GSFS am gewählten Startpunkt ersetzen

Wenn eine bestimmte GSFS am ausgewählten Startpunkt 0, (Abbildung a), die Wirkung der i-ten Kraft am Punkt 0 ist

- Gleiten -  $F_i$
- Rotation  $\underline{M}_{i0} = \underline{r}_i \times \underline{F}_i$

Die resultierende Wirkung aller Kräfte im gegebenen Kraftsystem am Punkt 0 beträgt

- Gleiten (Abbildung b)  $\underline{S} = \sum \underline{F}_i$
- Rotation (Abbildung c)  $\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_{i0}$

$$\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_{i0} = \sum \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}$$

Größe und Richtung des Gleit- und Rotationseffekts

$$\underline{S} = \underline{S}_x + \underline{S}_y + \underline{S}_z = S_x \cdot \underline{i} + S_y \cdot \underline{j} + S_z \cdot \underline{k}$$

$$\underline{M}_0 = \underline{M}_x + \underline{M}_y + \underline{M}_z = M_x \cdot \underline{i} + M_y \cdot \underline{j} + M_z \cdot \underline{k}$$

Die Wirkung der GSFS auf Punkt 0 wird durch sechs Gleichungen ausgedrückt

$$S_x = \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i$$

$$S_y = \sum F_{iy} = \sum F_i \cos \beta_i$$

$$S_z = \sum F_{iz} = \sum F_i \cos \gamma_i$$

$$M_x = \sum M_{ix} = \sum (y_i F_{iz} - z_i F_{iy})$$

$$M_y = \sum M_{iy} = \sum (z_i F_{ix} - x_i F_{iz})$$

$$M_z = \sum M_{iz} = \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})$$

Größe und Position des resultierenden Gleiteffektes S (Abbildung d) werden wie folgt berechnet:

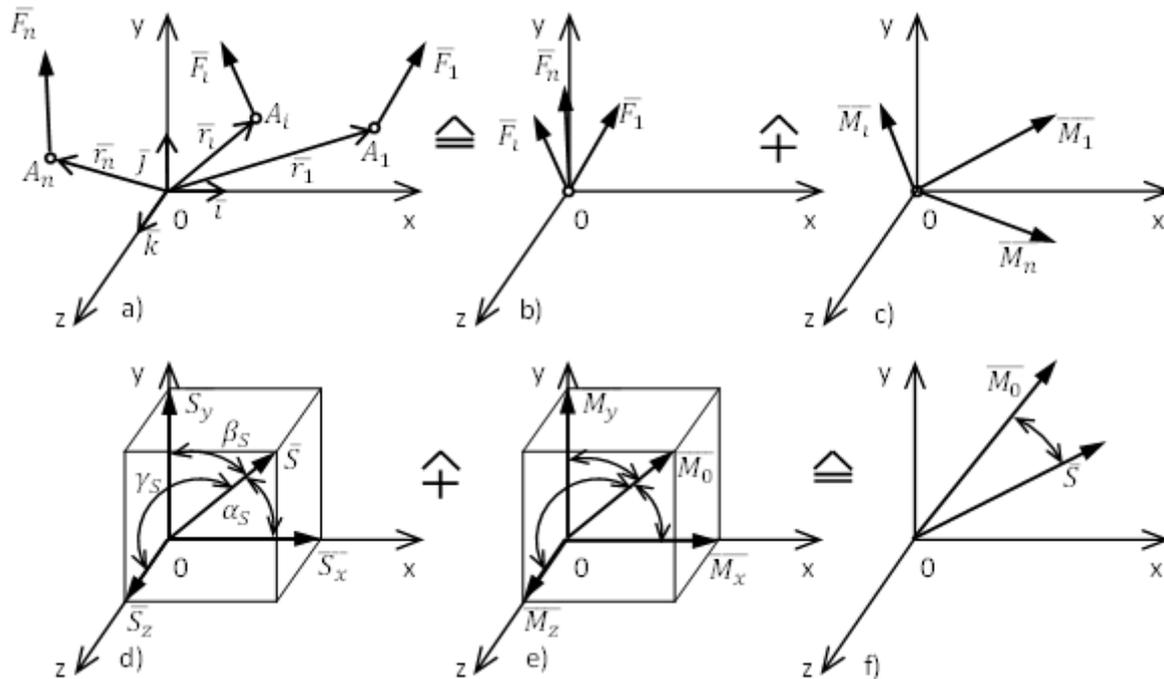
$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

$$\cos \alpha_S = \frac{S_x}{S}, \cos \beta_S = \frac{S_y}{S}, \cos \gamma_S = \frac{S_z}{S}$$

Größe und Position des resultierenden Rotationseffekts  $M_0$  (Abbildung e) ist:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\cos \alpha_M = \frac{M_x}{M_0}, \cos \beta_M = \frac{M_y}{M_0}, \left( \cos \gamma_M = \frac{M_z}{M_0} \right)$$



Der Winkel  $\varphi$  (Abbildung f) kann mit Hilfe eines skalaren Produkts bestimmt werden.

$$\underline{S} \cdot \underline{M}_0 = S M_0 \cos \varphi$$

wobei

$$\cos \varphi = \frac{S M_0}{S M_0}$$

## 8.2. GSFS Gleichgewichtsbedingungen

Die Bedingungen für ein allgemeines räumliches Kräftegleichgewicht sind die folgenden:

$$\underline{S} = 0, \underline{M}_0 = 0, \text{ tj. } \sum \underline{F}_i = \underline{0}, \sum \underline{M}_{i0} = \underline{0}$$

## Skalare Form: sechs Gleichgewichtsgleichungen:

- Alternative 1: drei Kraft- und drei Impulsgleichungen, die in Koordinatensysteme geschrieben werden.

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum F_{iz} = 0$$

$$\sum M_{ix} = 0$$

$$\sum M_{iy} = 0$$

$$\sum M_{iz} = 0$$

Wie in den vorherigen Kapiteln können Paare durch Impulsgleichungen zu anderen Zufallsachsen ersetzt werden, aber die Impulsgleichungen können nicht durch andere Kraftgleichungen ersetzt werden. Es müssen mindestens drei Impulsgleichungen zu drei verschiedenen Zufallsachsen vorhanden sein. Auf diese Weise können wir andere Alternativen finden, um Gleichgewichtsbedingungen auszudrücken.

- Alternative 2: 2 Kraft- und 4 Impulsgleichungen
- Alternative 3: 1 Kraft- und 5 Impulsgleichungen
- Alternative 4: 6 Impulsgleichungen zu den Achsen o1 - o6

Die Achsen o1 - o6 (muss nicht die Achsen x, y, z beinhalten) dürfen nicht parallel sein und dürfen nicht von einer Linie geschnitten werden.

# 9. STATISCHE ANALYSE DES KÖRPER-SYSTEMS

Ein System von Körpern ist eine Struktur, die aus mindestens zwei Körpern neben einem Rahmen besteht. Die einzelnen Körper eines Systems sind miteinander und mit dem Rahmen verbunden. Die Bindungen, die die einzelnen Körper mit dem Rahmen verbunden haben, sind externe Links, die Verbindungen zwischen den Körpern werden interne Links genannt. Je nach Art der gegenseitigen Verbindungen gibt es Systeme mit unterschiedlicher Beweglichkeit und unterschiedlichem Bewegungscharakter der einzelnen Körper. Nach charakteristischen Eigenschaften werden die Körpersysteme in planare und räumliche, bewegliche und unbewegliche, kinematisch und statisch bestimmte und unbewegliche Systeme unterteilt.

## 9.1. Kinematische und statische Bestimmung von planaren Mehrkörpersystemen

Die kinematische Bestimmung (Mobilität) von Mehrkörpersystemen wird mittels Opplungsabhängigkeit bewertet. Der Prozess ist analog zur Bestimmung der Körperbeweglichkeit.

Die Verbindung zweier Körper wird als kinematisches Paar bezeichnet. Bei planaren Mehrkörpersystemen werden kinematische Paare durch die Struktur in Rotation, Gleiten und Rollen unterteilt, die zwei Freiheitsgrade beseitigen und allgemein einen Freiheitsgrad beseitigen.

Besteht ein System aus  $n$  Körpern, aus denen einer angepasst, d.h. zu einem Rahmen angelegt wurde, haben die Körper vor ihrer Verknüpfung eine

$$v = 3(n - 1) = 3n$$

Grad der Bewegungsfreiheit, wobei  $n = n - 1$  neben einem Rahmen eine Anzahl von Körpern ist. Wenn das System neben " $n$ " Körpern auch " $m$ "-Teilchen enthält, wird die Anzahl der Freiheitsgrade eines solchen Systems vor der Verknüpfung wie folgt berechnet

$$v = 2m + 3n.$$

Die gesamte kinematische Determiniertheit eines Systems wird durch die Verknüpfungsabhängigkeitsformel bewertet.

$$i = v - u_{\text{internal}} - u_{\text{external}}$$

- $u_{\text{intern}}$  - Anzahl der Freiheitsgrade, die durch interne Links entfernt werden.
- $u_{\text{external}}$  - Anzahl der Freiheitsgrade, die durch externe Links entfernt werden.

Bei der Analyse der kinematischen Determiniertheit eines Systems wird sowohl die interne als auch die externe Determiniertheit analysiert, wobei die folgenden Situationen auftreten können:

- Die gesamte kinematische Determinanz wird in Bezug auf interne und externe Links bewertet, wobei die resultierende Anzahl der Freiheitsgrade der Systembewegung durch die Beziehung

> insgesamt kinematisch unbestimmt

$$i_c = v - u_{\text{internal}} - u_{\text{external}} = 0 \text{ insgesamt kinematisch determiniert}$$

< insgesamt kinematisch überdeterminiert

- Bei der Analyse der internen kinematischen Determinierung werden nur die internen Verbindungen berücksichtigt, d.h. die Verbindungen zwischen den Körpern des Systems. Sie wird durch die Abhängigkeit der Verknüpfung bestimmt.

> intern kinematisch unbestimmt

$$i_c = v - u_{\text{internal}} - v_{ST} = 0 \text{ intern kinematisch determiniert}$$

< intern kinematisch überdeterminiert

Wobei:

$u_{\text{internal}}$  - Anzahl der durch interne Links entfernten Freizügigkeitsgrade

$v_{ST}$  - Anzahl der Freiheitsgrade einer Systembewegung, die als ein einziger starrer Körper zu einem Rahmen betrachtet wird. Für ein System, das als ein einzelner Körper in der Ebene betrachtet wird,  $v_{ST} = 3$ .

- Bei der Analyse der externen kinematischen Determinante werden nur die externen Links berücksichtigt, die das System an den Rahmen binden, und das System gilt als ein starrer Körper. Sie wird durch die Abhängigkeit der Verknüpfung bestimmt.

> extern kinematisch unbestimmt

$$i_c = v_{ST} - u_{\text{external}} = 0 \text{ extern kinematisch determiniert}$$

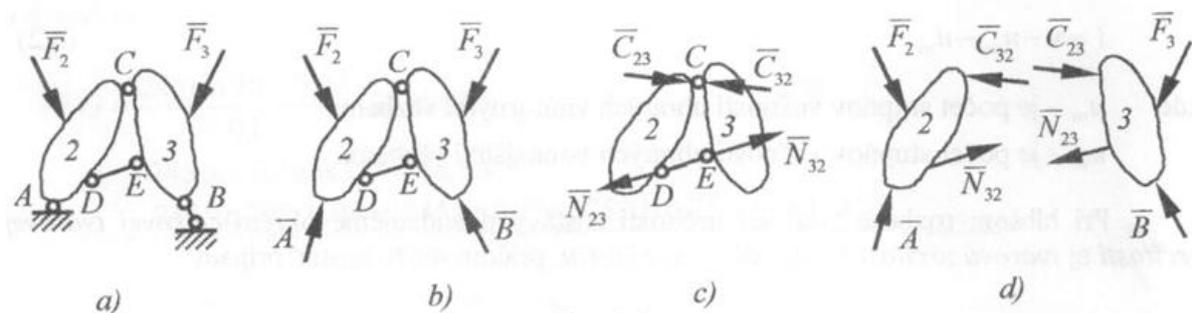
< extern kinematisch überdeterminiert

Ein kinematisch bestimmtes System kann intern kinematisch unbestimmt  $x$ -fach sein, muss aber gleichzeitig extern  $k$ -fach kinematisch überbestimmt sein.

## 9.2. Prinzip der statischen Lösung von Mehrkörpersystemen

Die statische Lösung von Mehrkörpersystemen basiert auf dem Theorem des Kräftegleichgewichts. Bezogen auf die Kräfte, die auf ein Mehrkörpersystem (Abbildung a) in seinem Gleichgewicht einwirken, kann man das sagen:

- Alle äußeren Kräfte (Last und Reaktion), die auf einen Körper in einem System wirken, sind ausgeglichen (Abbildung b).
- In Bezug auf das Wirkungs- und Reaktionsaxiom in jedem Glied sind alle Schnittgrößen ausgeglichen (Abbildung c).
- Die einzelnen Kraftsysteme, bestehend aus allen Kräften, die auf jeden Körper oder eine beliebige Gruppe von Körpern einwirken, sind ausgewogen (Abbildung d).

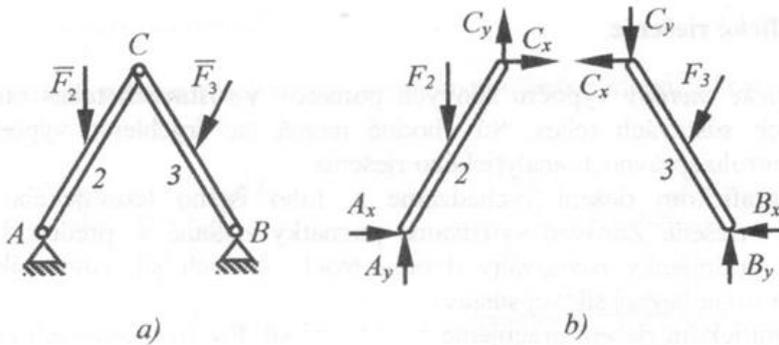


## 9.3. Analytische (rechnerische) Lösung von Mehrkörpersystemen

Die grundlegende Methode der statischen Lösung von Systemen ist eine Freigabemethode. Das Verfahren besteht darin, die einzelnen Körper im System (Stabsätze oder das gesamte System) freizugeben und die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen. Besteht das System aus  $n$ -Körpern ohne Rahmen und  $m$ -Teilchen, hängt das Gleichgewicht von  $r=3n+2m$  unabhängigen Gleichgewichtsgleichungen ab, aus denen bei statisch bestimmter Aufgabe die gleiche Anzahl von unbekanntem Parametern von Reaktionen und Zusatzkräften berechnet werden kann.

Für externe Kräfte, die auf ein System von Körpern wirken, und für Kräfte, die auf eine bestimmte Gruppe von Körpern im System wirken, gibt es drei Gleichgewichtsbedingun-

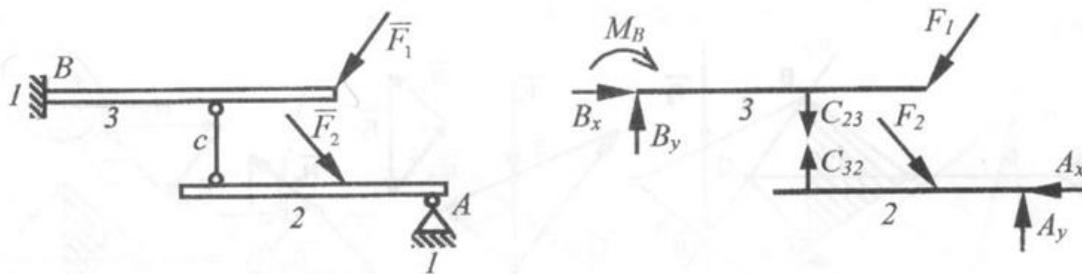
sind beispielsweise für Berechnungen oder Reaktionen  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_x$  3 und 3 Gleichgewichtsgleichungen für die freigegebenen Körper 2 und 3 (Abbildung b) des Mehrkörpersystems aus Abbildung a verfügbar.



Mehrkörpersysteme lassen sich hinsichtlich ihrer Löslichkeit in einfache und komplexe Systeme unterteilen.

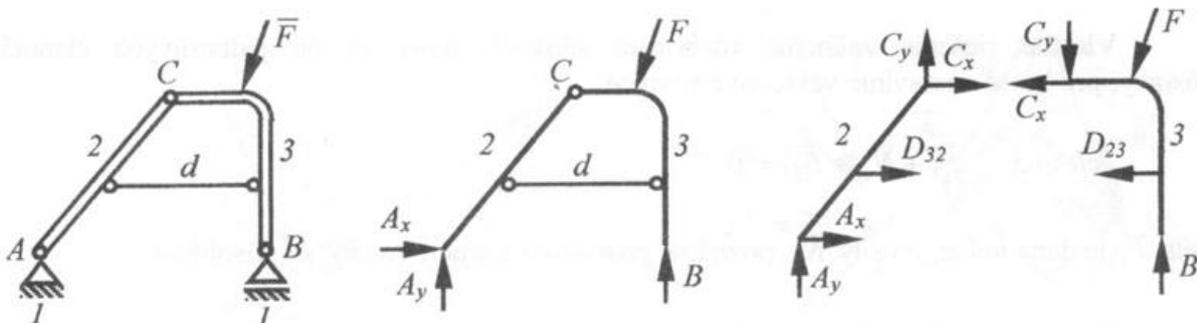
### Einfache Systeme

- Mit  $i_{\text{external}} \neq 0$  kann durch schrittweise Lösung des Gleichgewichts seiner Mitglieder gelöst werden (Abbildung).



Basierend auf dem Körper 2 Gleichgewicht,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $C_{32} = C_{23}$  wird bestimmt; basierend auf dem Körper 3 Gleichgewicht, kann  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $M_B$  berechnet werden.

- Im Falle von  $i_{\text{external}} = 0$  kann das System als Ganzes und anschließend die einzelnen Elemente gelöst werden.



- Einfache Systeme beinhalten Systeme mit Dreigelenkbögen.

Komplexe Systeme sind solche, die nicht direkt gelöst werden können und keine Dreigelenkbögen enthalten.

# 10. PLANARE STANGENSYSTEME

Ein spezifischer Fall von starren Mehrkörpersystemen sind so genannte Fachwerkkonstruktionen, denen wir in verschiedenen Bauwerken wie Brücken, Masten, Kränen, Dachkonstruktionen begegnen.

Je nach räumlicher Anordnung der Struktur und der Art des äußeren Kraftsystems werden Fachwerkkonstruktionen in räumliche und planare unterteilt.

Die Last von Fachwerkträgern kann an einem Punkt (Last, die von einem Kran angehoben wird) oder kontinuierlich (Gewicht einer Straße, Gewicht der Konstruktion selbst) konzentriert werden. In einigen Fällen ist die Wirkung der äußeren Last dauerhaft, während sie sich manchmal mit der Zeit ändert.

Zur Lösung von Fachwerkkonstruktionen ist es notwendig, ein geeignetes statisches Berechnungsmodell unter Berücksichtigung der folgenden Vereinfachungsannahmen zu erstellen:

- Fachwerkkonstruktionselemente können als eindimensionale Körper betrachtet werden, die durch zwei Verbindungen an der Struktur befestigt sind. Diese werden als binäre Körper bezeichnet.
- Die Verknüpfung aller binären Körper gilt als artikuliert. Dies ist auch bei Niet- oder Schweißverbindungen möglich, wenn die verbundenen Elemente nicht zu kurz sind. Bedingung ist die Anordnung der Elemente in einzelnen Gelenken, so dass sich die Achsen der in einem Gelenk verbundenen Schwerpunkte an einem Punkt schneiden (genannter Knotenpunkt).
- Die Strukturbelastung wird nur in Knotenpunkten berücksichtigt. Die Dauerbelastung der Strukturelemente konzentriert sich auf zwei Verbindungen, die das Element mit der Struktur verbinden.

Ein solches Berechnungsmodell wird als Stabsystem bezeichnet. Es handelt sich um ein System von unbelasteten Körpern - Stangen, die in Verbindungen verbunden sind und in den Verbindungen belastet werden. Bei einer solchen Belastung werden nur Axialkräfte erzeugt (Anspannung oder Druck). Bar-Systeme können räumlich oder planarisch sein.

## 10.1. Kinematische Determinierung von Stangensystemen

Das Stangensystem wird als ein System von Partikeln bewertet, die durch Stangen miteinander verbunden sind. Ein Stangensystem kann ein Ganzes sein, das als Stangenkörper bezeichnet wird.

Die kinematische Determiniertheit eines Stabkörpers, d.h. die externe kinematische Determiniertheit des planaren Stabsystems, wird gemäß der für einen Körper in einer Ebene gültigen Kopplungsabhängigkeit bewertet.

$$i_{external} = 3 - u_{external}$$

Die interne kinematische Determinante eines Stangensystems wird nach folgenden Kriterien bewertet

$$i_{internal} = 2s - p$$

>	intern kinematisch unbestimmt
<	intern kinematisch überdeterminiert

wobei

s - Anzahl der Verbindungen

p - Anzahl der Balken

3 - für beide Beziehungen die Anzahl der Freiheitsgrade eines Stabkörpers

2 - Anzahl der Freiheitsgrade eines freien Teilchens in einer Ebene

Kinematische Gesamtdeterminanz eines Stangensystems

$i_c = 2s - p - u_{vo}$ , if  $i_c = 0$  - das System ist kinematisch und statisch bestimmt.

## 10.2. Statische Lösung von Stangensystemen

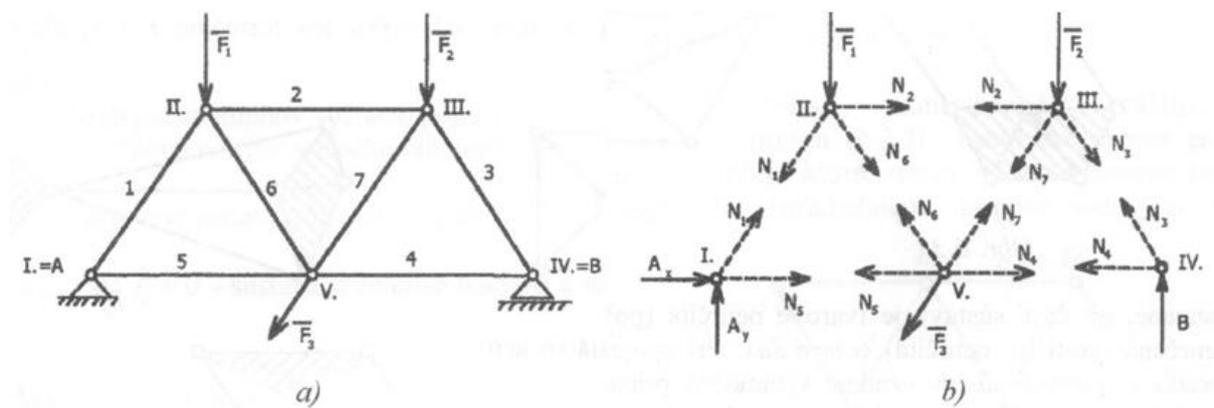
Das Ziel der statischen Lösung von Stangensystemen ist es, die Größe der Axialkräfte in den Stangen, ihre Ausrichtung und unbekannt Parameter der äußeren Reaktion in Abhängigkeit von der äußeren Belastungskraft zu bestimmen. Dies könnte durch mehrere Methoden erreicht werden.

- Gleichgewicht der Zentralkraftsysteme, das nur auf die einzelnen Gelenke wirkt (Verfahren der Knotenpunkte).
- Gleichgewicht der Kräfte, die auf einen Teil eines Stangensystems wirken (Verfahren der Abschnitte)

## 10.3. Nodalpunktverfahren

Das Prinzip des Verfahrens besteht darin, das Gleichgewicht aller Kräfte, die auf jede Verbindung wirken, getrennt zu lösen. Während der allmählichen Freigabe aller Gelenke werden die Gleichgewichtsbedingungen des auf jedes Gelenk wirkenden zentralen Kraftsystems bestimmt.

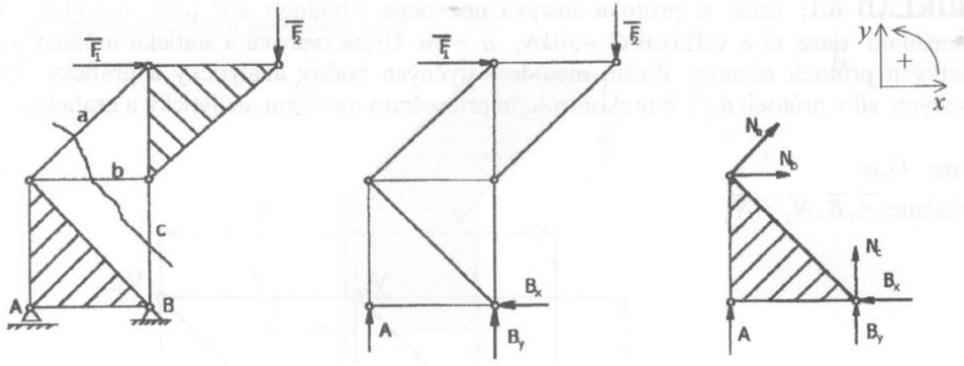
Für den Fall, dass das System als Ganzes (Systemkörper) kinematisch und statisch bestimmt ist, ermöglicht das Lösen des Gleichgewichts der äußeren Kräfte (zur Berechnung externer Reaktionen) die Gesamtlösung von Gleichgewichtsgleichungen für einzelne Gelenke.



## 10.4. Verfahren der Abschnitte

Die abschnittsweise Lösung von Axialkräften basiert auf folgender Annahme: Wenn das Stangensystem ausgewuchtet ist, müssen die auf jeden Schnittteil des Stangensystems wirkenden Kräfte ausgeglichen werden. Das Gleichgewicht dieses Teils kann in der Ebene oder im Raum gelöst werden. Für einen Körper in einer Ebene (Raum) können 3 (6) unabhängige statische Gleichgewichtsbedingungen vorliegen, mit denen es möglich ist, 3 (6) unbekannte Axialkräfte zu bestimmen. Daraus folgt, dass es bei dieser Methode notwendig ist, das Stangensystem durch imaginären Schnitt über drei (6 im Raum) Stangen zu teilen, die sich nicht an einem Punkt schneiden.

Aus dem Gleichgewicht eines dieser Teile ist es möglich, Axialkräfte in geschnittenen Stangen zu berechnen. Wenn jedes der abgeschnittenen Teile einer Belastungskraft und Reaktion ausgesetzt ist, muss diese Reaktion zunächst aus dem Gleichgewicht des Stabkörpers bestimmt werden.



## II. SCHWERPUNKT DER PHYSIKALISCHEN UND GEOMETRISCHEN OBJEKTE

Schwerpunkt eines parallelen Kraftsystems mit Kräften, die mit einem Punkt verbunden sind, durch den das resultierende Kraftsystem beim Drehen des Systems um einen beliebigen Winkel verläuft. Sind die Parallelkräfte die Erdschwerkraft (die Schwerkraft einzelner Körperteile), wird der Schwerpunkt dieses Kraftsystems als Schwerpunkt bezeichnet.

Die Lage des Schwerpunktes kann analytisch, grafisch und experimentell bestimmt werden. Im Falle der analytischen und grafischen Lösung ist die Bedingung die bekannte Gewichtsverteilung im Körper, während sich die grafischen Lösungen hauptsächlich auf den planaren oder symmetrischen Raumkörper konzentrieren. Die experimentelle Bestimmung der Schwerpunktlage wird vor allem bei komplexen Formen und inhomogenen Körpern eingesetzt.

Analytische Identifizierung der Schwerpunktlage

Die Elementarkraft  $dG = \rho dV g$  wirkt auf das Volumenelement  $dV$  eines Körpers mit einem Gewicht, während  $g$  eine Größe der Gravitationsbeschleunigung ist. Für die x-Koordinate des Schwerpunktes gilt, dass

$$x_T = \frac{\int_V x \rho dV g}{\int_V \rho dV g} = \frac{\int_V x \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

während das V-Volumen vollständig integriert ist. Eine ähnliche Gleichung gilt für  $y_T$  und  $z_T$ . Für die Berechnung von Integralen müssen wir die Verteilung der Dichte  $\rho$  im Körper kennen, also die Funktion  $\rho = \rho(x, y, z)$ .

Im Falle einer homogenen Körperdichte ist das spezifische Körpergewicht konstant. Der Schwerpunkt der Masse ist in diesem Fall identisch mit dem Schwerpunkt der geometrischen Figur. Daraus folgt, dass die Position des Schwerpunktes eines homogenen Körpers nicht von seiner Masse abhängt, sondern von  $i$ 's, gegeben durch die geometrische Form.

$$x_T = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_T = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_T = \frac{\int_V z dV}{V}$$

Im Falle eines homogenen Körpers mit konstanter Dicke ist  $t$  (Shell)  $dV = t dS$ , wobei  $dS$  ein Flächenelement ist und die Koordinaten eines solchen Körpers sind.

$$x_T = \frac{\int_S x dS}{S}, \quad y_T = \frac{\int_S y dS}{S}, \quad z_T = \frac{\int_S z dS}{S}$$

wobei  $S$  die Gesamtfläche eines Körpers ist,  $Sx dS$  - statisches Moment eines Körpers zur Ebene  $yz$ .

Bei einem homogenen Körper mit konstanter Querschnittsfläche  $S$  über die gesamte Länge ist  $dV = S dl$  und die Koordinaten eines solchen Schwerpunktes sind

$$x_T = \frac{\int_l x dl}{l}, \quad y_T = \frac{\int_l y dl}{l}, \quad z_T = \frac{\int_l z dl}{l}$$

wobei  $l$  ein Element seiner Länge ist.

Kann ein Körper in eine bestimmte Anzahl von Teilen unterteilt werden, deren Schwerpunkte bekannt sind oder berechnet werden können, so kann der Schwerpunkt eines derart zusammengesetzten homogenen Körpers wie folgt berechnet werden:

$$x_T = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}, \quad y_T = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}, \quad z_T = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}$$

Für eine Hülle im Raum

$$x_T = \frac{\sum x_i S_i}{\sum S_i}, \quad y_T = \frac{\sum y_i S_i}{\sum S_i}, \quad z_T = \frac{\sum z_i S_i}{\sum S_i}$$

Für einen Körper mit konstanter Querschnittsfläche oder für eine Linie im Raum.

$$x_T = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}, \quad y_T = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}, \quad z_T = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i}$$

Die Berechnung der Schwerpunktkoordinaten erfolgt durch Eingabe der Ergebnisse von Teilberechnungen in eine Tabelle.

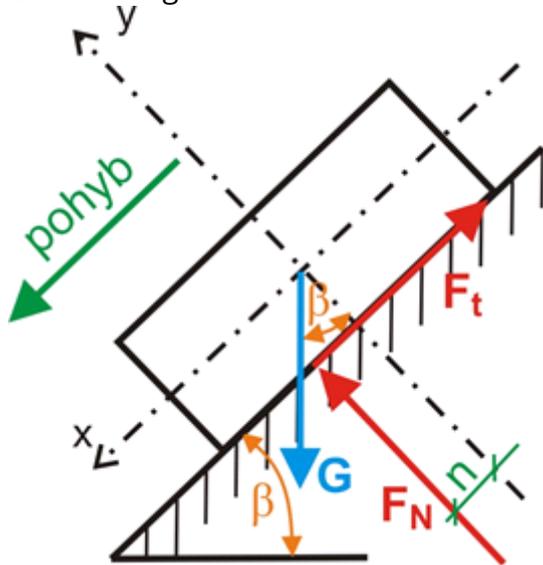
$i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$H_i$	$x_i H_i$	$y_i H_i$	$z_i H_i$
1							
2							
...							
$\Sigma$				A	B	C	D

Das Symbol  $H_i$  repräsentiert eine der Variablen  $V_i, S_i, S_i, I_i$ . Die Koordinaten des Schwerpunktes werden als Anteil der relevanten Summen berechnet.

# 12. PASSIVER WIDERSTAND

## 12.1. Passiver Widerstand

Gleitreibung:



Legende: pohyb - Bewegung

F<sub>t</sub> - Reibungskraft

F<sub>N</sub> - normale Reaktion

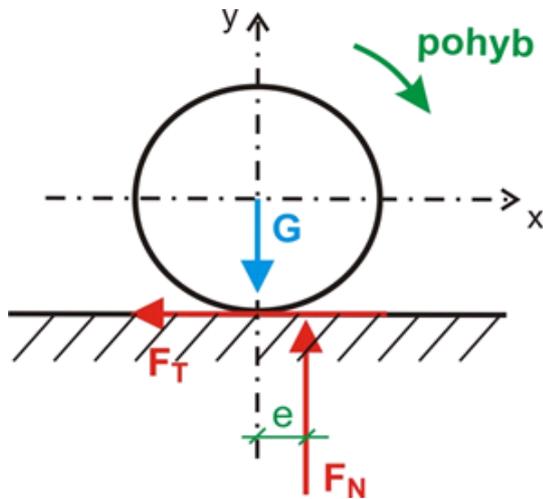
**Coulomb's Recht:**

$$F_t = F_N \cdot f$$

f - Gleitreibungskoeffizient

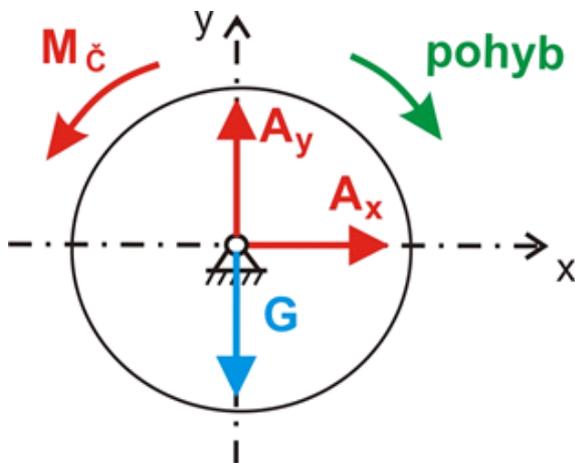
F<sub>t</sub> - Reibungskraft - wirkt immer gegen die Bewegung.

## 12.2. Rollwiderstand



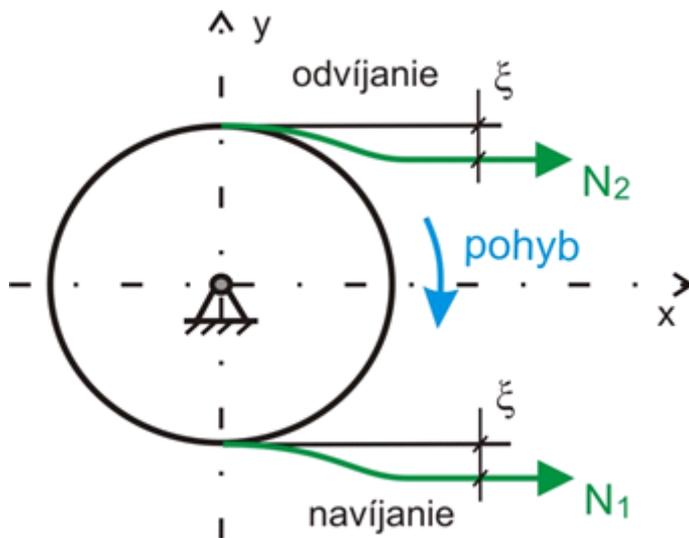
$F_T$  - tangentielle Reaktion  
 $F_T$  - wirken gegen mögliches Verrutschen

## 12.3. Stiftreibungsmoment



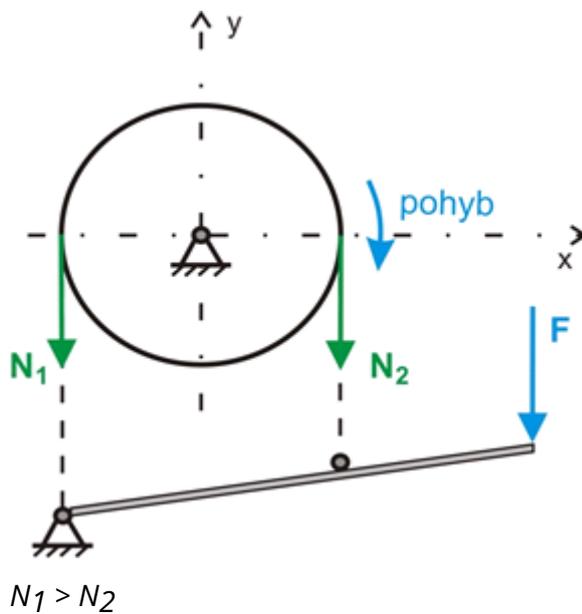
$M_{\check{c}} = f_{\check{c}} \cdot r_{\check{c}} \cdot A$   
 $M_{\check{c}} = f_{\check{c}} \cdot r_{\check{c}} \cdot \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$   
 $M_{\check{c}}$  - Stiftreibungsmoment  
 $f_{\check{c}}$  - Koeffizient der Bolzenreibung  
 $r_{\check{c}}$  - Stiftradius  
 $A$  - resultierende Reaktion im Pin

## 12.4. Steifigkeit, Unbeweglichkeit der Seile



Legende: odvíjení - Taumel, Navíjení - Aufzug, Pohyb - Bewegung  
 $\xi$  (ksi) - Arm der Seilsteifigkeit

## 12.5. Faserreibung auf der zylindrischen Oberfläche:

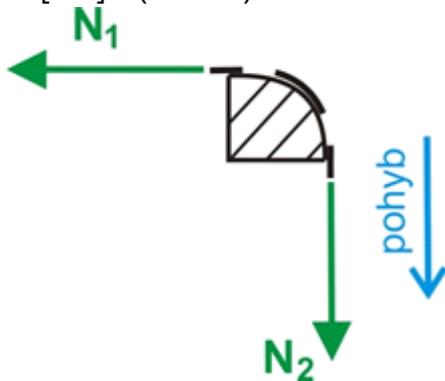


**Eulersches Gesetz:**  $N_1 = N_2 * e^{\alpha * f_1}$

$\alpha$  - Wickelwinkel[rad.]

$f_1$  - Koeffizient der Faserreibung auf der zylindrischen Oberfläche

$\alpha$  [rad] =  $(\pi / 180) \cdot \alpha$



$N_1 > N_2$

**Eulersches Gesetz:**  $N_1 = N_2 * e^{\alpha * f_1}$