Interreg
EVROPSKÁ UNIE
Rakousko-Česká republika
Evropský fond pro regionální rozvoj

STROJÍRENSTVÍ

Statika

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES UPPER AUSTRIA
VŠTE
EVROPSKÁ UNIE

OBSAH

1. ZÁKLADNÍ POJMY, PRINCIPY A AXIOMY STATIKY

1.1. Základní pojmy

Pevné těleso

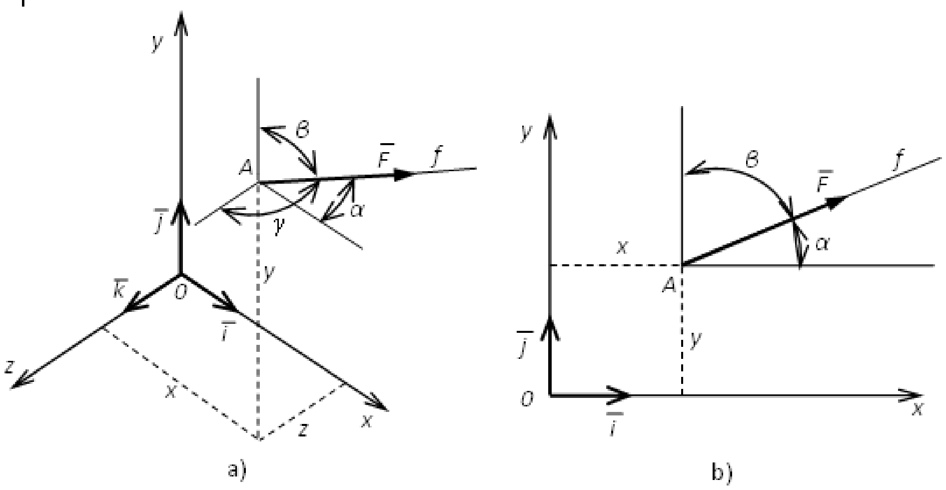
Rozumí se dokonale pevné těleso – je těleso, útvar, ve kterém se při pohybu vzájemná vzdálenost dvou libovolných bodů nemění.

Hmotný bod

Hmotný útvar, jehož rozměry je možné zanedbat. V statice rozumíme bod tělesa, ve kterém si představujeme soustředěnou hmotu celého tělesa.

Síla a moment síly

Síla je základní mírou účinku dvou objektů. Síla je vektorová veličina. Síla je vektorem vázaným k přímce.



Obrázek 1

- Síla v prostoru (*Obr. 1a*) jednoznačně určena 6 parametry: působištěm A(x, y, z) – 3 parametry, velikostí F – 1 parametr, polohou f a orientací – úhly α, β, (γ) – 2 nezávislé parametry, protože úhly jsou vzájemně vázané vztahem: $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$
- Síla v rovině (*Obr. 1b*) je jednoznačně určena 4 parametry: A(x, y), F, α (β), protože

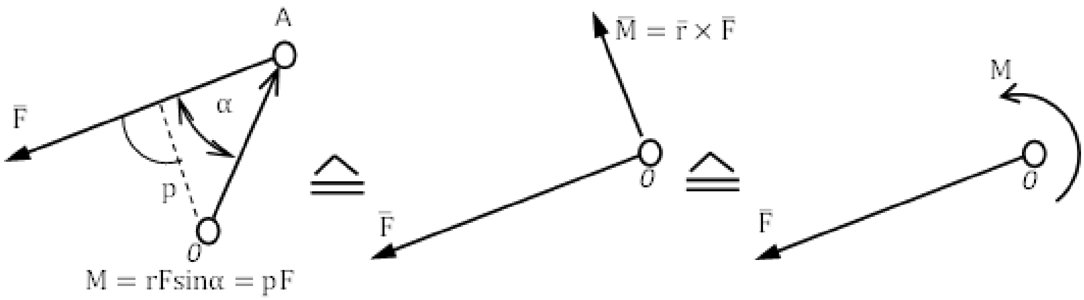
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

a$cos^2\alpha + cos^2\beta = 1.$

Síla má účinek:

- posuvný – stejný na všechny body objektu, na který síla působí – rovný velikosti síly,
- otáčivý, který je jiný na každý bod objektu. Velikost otáčivého účinku je závislá na kolmý vzdálenosti bodu od nositelky síly a je určena momentem sily k danému bodu.

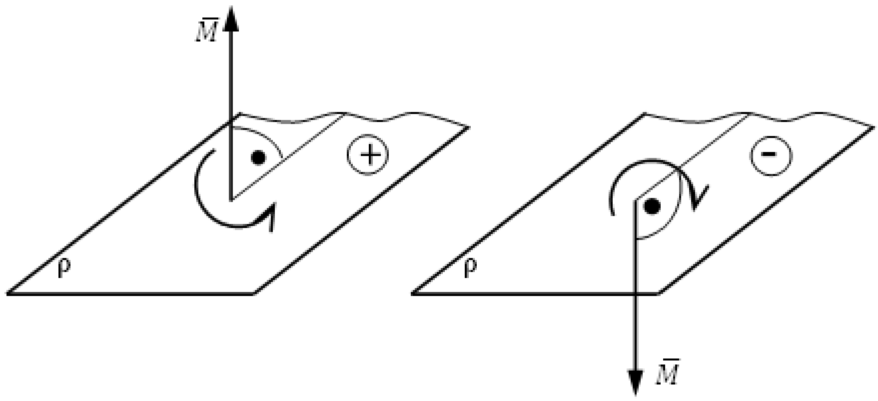
Moment síly – je vektor definovaný jako vektorový součin $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$. Absolutní velikost momentu sily k libovolnému bodu např. A je rovna součinu síly a ramene síly – její kolmé vzdálenosti od toho bodu (*Obr. 2*).



Obrázek 2

Orientace vektoru momentu síly je daná smyslem otáčení síly $\underline{F}$ vzhledem k bodu A. Moment síly je kladný, pokud se otáčení děje proti smyslu otáčení hodinových ručiček.

Vektor momentu se znázorní jako vektor kolmý na rovinu otáčení. Orientace vektoru se určí dle pravidla pravé ruky (prsty pravé ruky ukazují smysl otáčení, palec pravé ruky ukazuje směr a smysl vektoru $\underline{M}$ (*Obr. 3*).

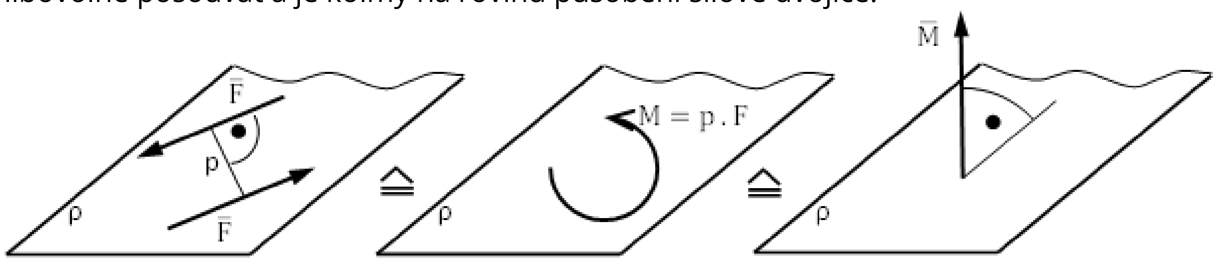


Obrázek 3

Silová dvojice (moment) – dvě síly vzájemně rovnoběžné, stejně velké, opačně orientované, které neleží na jedné nositelce. Silová dvojice nemá posuvný účinek, má jen účinek otáčivý, rovný součinu jedné ze sil a kolmé vzdálenosti mezi silami. Účinek silové dvojice je daný jejím momentem (Obr. 4)

$M = p\,F.$

Vektor momentu silové dvojice $\underline{M}$ je vektorem volným, tzn. můžeme ho v prostoru libovolně posouvat a je kolmý na rovinu působení silové dvojice.



Obrázek 4

1.2. Jednotky síly a momentu

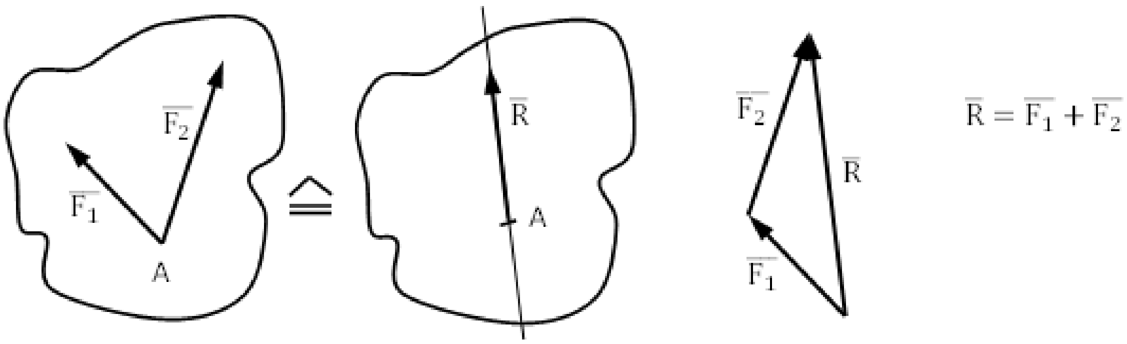
Hlavní jednotkou pro sílu je 1 Newton [N]. Je to síla, která udělí hmotnosti 1 kg zrychlení 1ms-2, tedy
$1N = 1kg.m.s^{-2}$.

Hlavní jednotkou momentu je 1N.m [Nm]

1.2.1. Silové soustavy

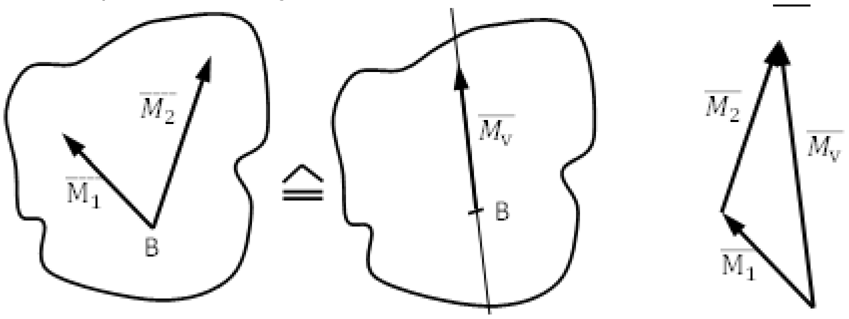
- Dvě a více sil působících na jeden objekt tvoří silovou soustavu.

- Pokud silovou soustavu je možné nahradit jedinou silou $\underline{R}$, nazývá se tato síla výslednicí dané silové soustavy. Silová soustava má potom posuvný účinek ve směru nositelky výslednice $\underline{R}$ (Obr. 5).



Obrázek 5

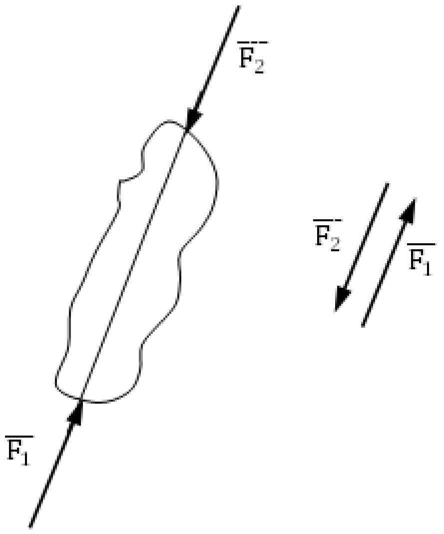
- Pokud silovou soustavu je možné nahradit jediným momentem $\underline{M_v}$, nazývá se tento moment výsledným momentem dané silové soustavy. Silová soustava má potom otáčivý účinek v rovině kolmé na moment $\underline{M_v}$ (Obr. 6).



Obrázek 1.6

- Obecně má silová soustava účinek posuvný i otáčivý.

- Silová soustava je v rovnováze, jestliže výsledný posuvný i otáčivý účinek je nulový. Nejjednodušší rovnovážnou silovou soustavou jsou dvě síly na jedné nositelce, stejně velké, opačně orientované (Obr. 1.7).



$$\overline{F_1} = -\overline{F_2}$$

$$\overline{F_1} + \overline{F_2} = \overline{0}$$

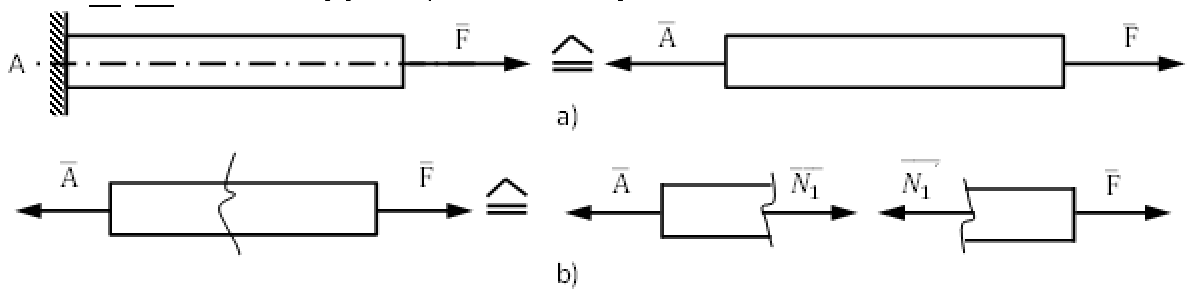
Obrázek 1.7

1.3. Rozdělení sil dle působení

Síly dělíme:

- vnější (Obr. 1.8a), vyjadřující účinek okolních útvarů na vyšetřovaný objekt. Jsou to síly zatěžující - primární ($\underline{F}$) a vazbové reakce – sekundární ($\underline{A}$), závislé na zatěžujících silách

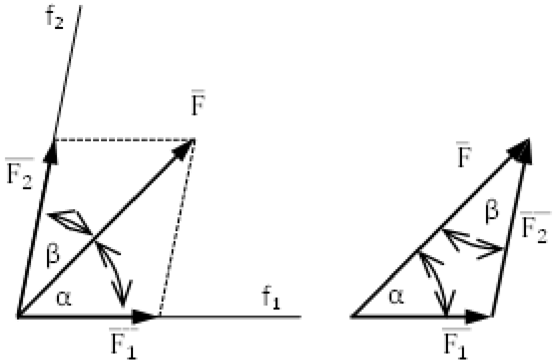
- vnitřní (Obr. 1.8b), vyjadřující účinek jedné části tělesa (soustavy) na druhou ($\underline{N_1}$, $\underline{N_1'}$). Vnitřní síly jsou způsobené vnějšími silami.



Obrázek 1.8

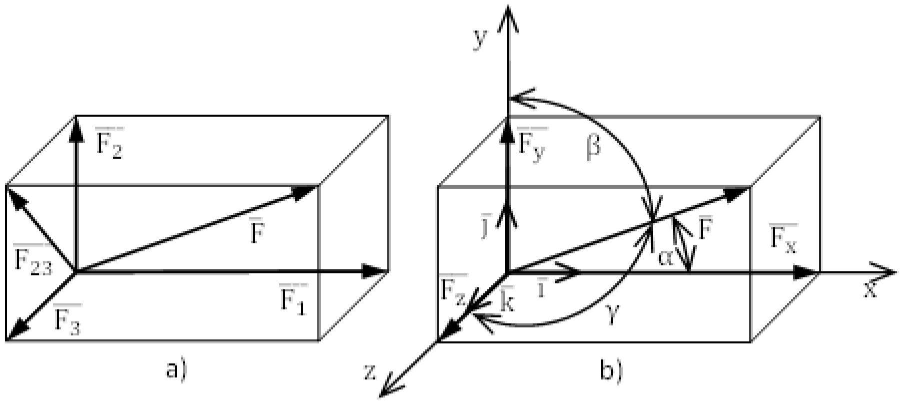
1.4. Rozklad síly, složky síly

Sílu $\underline{F}$ v daném bodě v rovině můžeme jednoznačně rozložit do dvou složek $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$. Když je daná síla $\underline{F}$ a směry nositelek její složek (dané úhly α, β), můžeme určit velikosti její složek $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ (Obr. 1.9). Pokud je síla $\underline{F}$ výslednicí sil $\underline{F_1}$ a $\underline{F_2}$, potom $\underline{F} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$.



Obrázek 1.9

V prostoru je možné sílu rozložit do tří složek (Obr. 1.10a).



Obrázek 1.10

$\underline{F} = \underline{F_1} + \underline{F_{23}}$
$\underline{F_{23}} = \underline{F_2} + \underline{F_3}$
$\underline{F} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3}$

Pokud jsou složky síly vzájemně kolmé, můžeme do jich směrů umístit souřadnicové osy. Značíme je $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$, $\underline{F_z}$ a nazveme pravoúhlými složkami dané síly (Obr. 1.10b).

$\underline{F} = \underline{F_x} + \underline{F_y} + \underline{F_z}$

V pravoúhlé souřadnicové soustavě jsou velikosti složek:

$F_x = \underline{F}.\underline{i} = F\ cos\ cos\ \alpha$
$F_y = \underline{F}.\underline{j} = F\ cos\ cos\ \beta$ $\quad$ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ – jednotkové vektory
$F_z = \underline{F}.\underline{k} = F\ cos\ cos\ \gamma$

Složky můžeme vyjádřit jako:

$\underline{F_x} = F_x\underline{i}$
$\underline{F_y} = F_y\underline{j}$
$\underline{F_z} = F_z\underline{k}$

Výsledná síla je pak vyjádřena vztahem:

$\underline{F} = F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k}$

Pokud známe velikosti složek síly, její velikost bude:

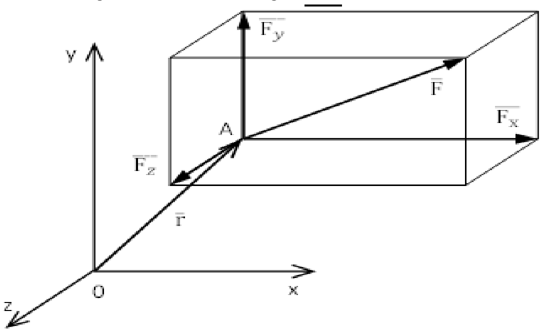
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

a její směr určíme pomoci uhlů α, β, (γ):

$cos\ cos\ \alpha = \frac{F_x}{F}\ , = \frac{F_y}{F}, cos\ cos\ \gamma = \frac{F_z}{F}.$

1.4.1. Varignonova – momentová věta

Moment síly k danému bodu je roven součtu momentů jejích složek k tomu stejnému bodu. Dle Obr. 1.11 moment síly $\underline{F}$ k bodu 0 je $\underline{M_0} = \underline{r} \times \underline{F}$.



Obrázek 1.11

Moment síly $\underline{F}$ k bodu 0 je $\underline{M_0} = \underline{r} \times \underline{F}$, protože

$\underline{F} = \underline{F_x} + \underline{F_y} + \underline{F_z}$,
$\underline{M_0} = \underline{r} \times \left(\underline{F_x} + \underline{F_y} + \underline{F_z}\right)$,
$\underline{M_0} = \underline{r} \times \underline{F_x} + \underline{r} \times \underline{F_y} + \underline{r} \times \underline{F_z}$, a teda
$\underline{M_0} = \underline{M_{0Fx}} + \underline{M_{0Fy}} + \underline{M_{0Fz}}$.

1.5. Základní principy a axiomy statiky

Axiom je základní poučka, která se přijímá bez důkazů. Vychází obyčejně z experimentálních zkušeností.

Klasická mechanika je postavena na třech základních Newtonových zákonech:

- Zákon setrvačnosti (1. Newtonův zákon)
- Zákon síly (2. Newtonův zákon)
- Zákon akce a reakce (3. Newtonův zákon)

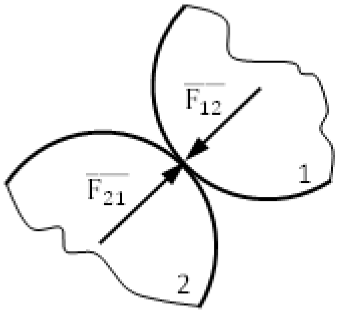
Statika se opírá o tyto základní axiomy:

1.5.1. Axiom setrvačnosti (1. Newtonův zákon)

Těleso, které je v relativním klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, zůstává v tomto stavu, pokud na něj nepůsobí žádná vnější síla, nebo pokud na něj působí rovnovážná silová soustava.

1.5.2. Axiom akce a reakce (3. Newtonův zákon)

Každé akci odpovídá stejně velká, opačně orientovaná reakce. To značí, že účinek jednoho tělesa na druhé je stejně velký, jen opačně orientovaný než je účinek druhého tělesa na první (Obr. 1.12).
$\underline{F_{12}} + \underline{F_{21}} = 0$
$\underline{F_{12}} = -\underline{F_{21}}$



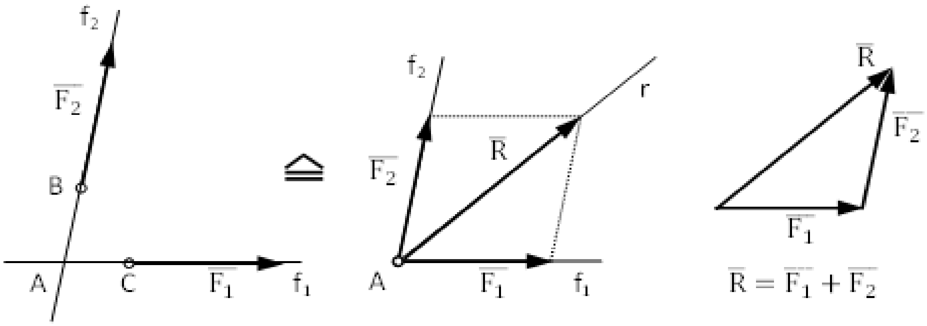
Obrázek 1.12

1.5.3. Axiom zachování účinku

Účinek dané silové soustavy se nezmění, pokud k ní přidáme nebo od ní odebere rovnovážnou silovou soustavu.

1.5.4. Axiom vektorového skládání sil

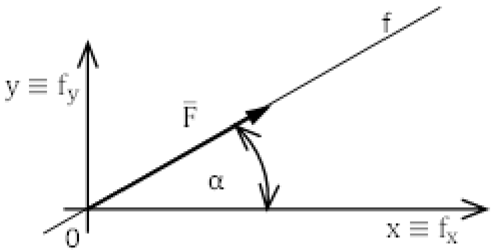
Výslednice $\underline{R}$ dvou různoběžných sil $\underline{F_1}$ a $\underline{F_2}$ je rovna jejich vektorovému součtu $\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$ a prochází pořád průsečíkem jejich nositelek (Obr. 1.13).



Obrázek 1.13

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

V počátku zvolené souřadnicové soustavy 0, x, y působí síla $\underline{F}$ o velikosti F = 6 kN (Obr. 1.1.1). Směr nositelky síly $\underline{F}$ je daný úhlem α = 30°. Rozložte sílu $\underline{F}$ na její složky $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$, jejichž nositelky f_x, f_y jsou totožné se souřadnicovými osami x, y.



Obrázek 1.1.1

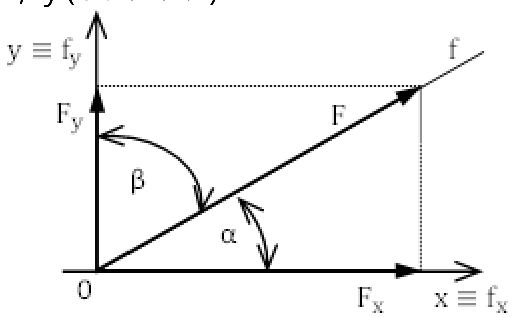
Řešení:

Rozklad síly $\underline{F}$, která leží na nositelce f, na její složky je vlastně jejím nahrazením ekvivalentní silovou soustavou sil $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$, ležící na nositelkách f_x, f_y. Pokud nositelky f_x, f_y jsou shodné se souřadnicovými osami x, y, potom síly $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$ jsou souřadnicovými složkami síly $\underline{F}$ v dané souřadnicové soustavě. Při řešení vycházíme ze základní vektorové podmínky nahrazení (a), přičemž rozklad síly $\underline{F}$ je možné vykonat více způsoby.

$$\underline{F} = \underline{F_x} + \underline{F_y} \qquad \text{(a)}$$

Analytické řešení:

Řešení pomocí kosinusů směrových úhlů α, β, které svírá nositelka f síly $\underline{F}$ s nositelkami fx, fy (Obr. 1.1.2)

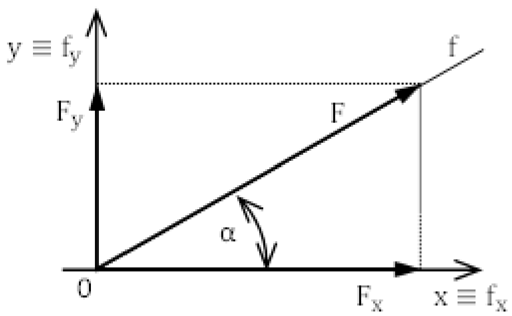


Obrázek 1.1.2

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 30° = 60°$$
$$F_x = F \ \cos\cos\alpha \ = 6\cos\cos 30° \ = 5{,}196kN$$
$$F_y = F \ \cos\cos\beta \ = 6\cos\cos 60° \ = 3kN$$

Druhým způsobem řešení je využití trigonometrických vztahů platících v pravoúhlém trojúhelníku. Na základě Obr. 1.1.3 pro velikosti $\underline{F}$, $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$ platí

$$\cos\cos\alpha \ = \frac{F_x}{F} \Rightarrow \ F_x = F\cos\cos\alpha \ = 6\cos\cos 30° \ = 5{,}196kN$$
$$\cos\cos\alpha \ = \frac{F}{F_y} \Rightarrow \ F_y = F\sin\sin\alpha \ = 6\sin\sin 30° \ = 3kN$$

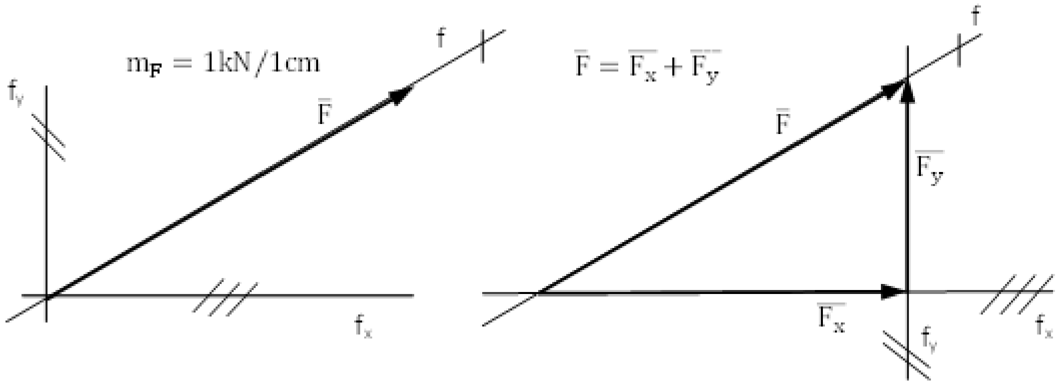


Obrázek 1.1.3

Grafické řešení: Sílu $\underline{F}$ můžeme nahradit ekvivalentní soustavou sil $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$. Jde o grafické sečtení vektorů sil v tzv. silovém obrazci, kde síla $\underline{F}$ jako výslednice dvou různoběžných sil se společným působištěm, zanesených do silového obrazce v libovolném pořadí, je orientovanou úsečkou vycházející z počátečního bodu první síly a vstupující do koncového bodu síly druhé.

Při samotném řešení vycházíme z Obr. 1.1.4a, ve kterém zakreslíme známou sílu $\underline{F}$ a známé parametry hledaných sil. V případě sil $\underline{F_x}$, $\underline{F_y}$ známe jejich nositelky. V tomto obrázku je důležité správně zakreslit vektory jednotlivých sil (jejich směry). Silový obrazec (Obr. 1.1.4b) sestavíme následovně:

Na rovnoběžku s nositelkou f naneseme velikost síly $\underline{F}$ ve vhodně voleném měřítku sil m_F. Počátečním a koncovým bodem vektoru síly $\underline{F}$ vedeme rovnoběžky s nositelkami f_x, f_y v libovolném pořadí. Dostaneme uzavřený trojúhelník, jehož odvěsny představují velikosti hledaných sil. Orientace těchto sil je v silovém obrazci opačná k orientaci jejich výslednice $\underline{F}$. Odměřením délky grafických obrazů hledaných sil a jejich porovnáním s mírkou sil dostaneme skutečné velikosti těchto sil.



Obrázek 1.1.4

$F_{xg} = 5{,}2cm \Rightarrow F_x = F_{xg}m_F = 5{,}2kN$
$F_{yg} = 3cm \Rightarrow F_y = F_{yg}m_F = 3kN$

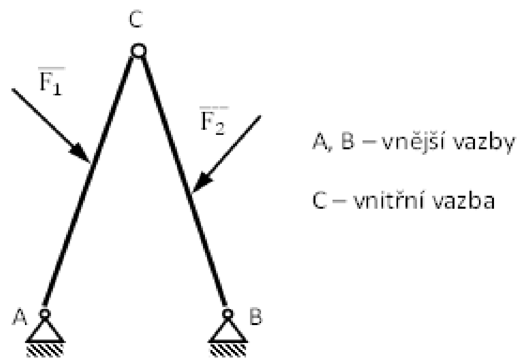
2.POHYBLIVOST A VAZBY HMOTNÝCH OBJEKTŮ

2.1. Vazby a vazbová závislost

Silové soustavy působí vždy na určitý hmotný objekt (bod, těleso, soustava těles, soustava bodů). Hmotné objekty mohou být v rovině, nebo v prostoru umístěny volně, tzn. s neomezenou možností pohybu, nebo jsou vázané vazbami, kterými je možnost jejich pohybu omezená. V těchto vazbách vznikají sily – tzv. vazbové reakce.

Vazby, kterými se soustava upevňuje k nepohyblivému tělesu – tzv. rámu, jsou vnější vazby a reakce, které v nich vznikají, jsou vnější reakce (Obr. 2.1).

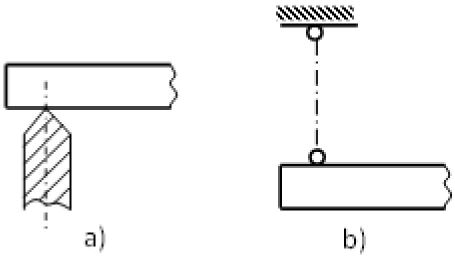
Pokud mechanickou soustavu (soustavu těles, bodů) tvoří několik objektů, vazby mezi nimi jsou vnitřní vazby a reakce v nich jsou vnitřní reakce.



Obrázek 2.1

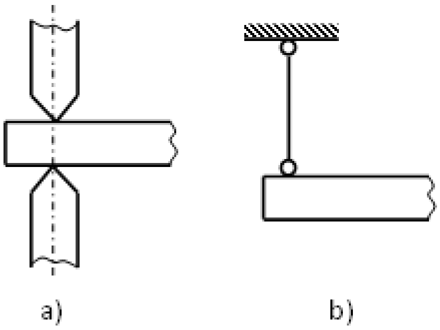
Vazby snižují pohyblivost hmotných objektů, přičemž jednotlivé typy vazeb mají možnost zabránit jenom určitým pohybům objektů. Pak vazbové reakce (sekundární síly) vyvolané po zatížení objektů vnějšími, zatěžujícími (primárními) silami, můžou působit jenom v tom směru, v kterém je vazba schopná zabránit pohybu.

Pokud vazba odebírá možnost pohybu jenom na jednu stranu, hovoříme o jednostranné – unilaterální vazbě (taky silové). Na Obr. 2.2a je příklad vazby jednostranným opřením, na Obr. 2.2b příklad vazby lanem.



Obrázek 2.2

Pokud vazba odebírá možnost pohybu na dvě strany, jde o vazbu dvoustrannou – bilaterální (nucenou). Na Obr. 2.3a je uveden příklad vazby oboustranným opřením, na Obr. 2.3b příklad vazby prutem.



Obrázek 2.3

2.2. Stupně volnosti pohybu a vazbová závislost hmotných objektů

Počet stupňů volnosti pohybu je počet všech nezávislých parametrů, kterými je jednoznačně určená poloha objektu v rovině nebo v prostoru. Vyjadřuje současně počet možných nezávislých pohybů, které daný objekt může v rovině, nebo v prostoru vykonat.

Pohyblivost, resp. nepohyblivost (tvarovou určitost) hmotného objektu posuzujeme pomocí jeho vazbové závislosti:

$i = v - u$

kde: i – je počet stupňů volnosti pohybu hmotného objektu
v – je počet stupňů volnosti pohybu volného, nevázaného objektu
u – je počet stupňů volnosti pohybu odebraných vazbami

2.3. Tvarová a statická určitost

Při posouzení tvarové určitosti, tzn. pohyblivosti, resp. nepohyblivosti hmotného objektu může mít vazbová závislost vyjádření:

$\underline{i = v - u = 0}$, úloha je tvarově určitá. Vazby odebírají volnému objektu všechny možnosti pohybu, jeho poloha je přesně vymezená.

$\underline{i = v - u > 0}$, úloha je tvarově neurčitá. Vazby odebírají míň stupňů volnosti, jako měl volný objekt. Objekt má pořád možnost pohybu.

$i = v - u < 0$, úloha je tvarově přeurčená. Vazby odebírají volnému objektu víc stupňů volnosti, jako měl před vázáním, jeho poloha je přeurčená.
Analýzou statické určitosti posuzujeme, jestli máme k dispozici dostatečný počet podmínek, tj. podmínek rovnováhy na určení neznámých parametrů vazbových reakcí. Protože $v = r$; $u = n_p$, pak aj $i = i_S$, můžeme najednou posoudit tvarovou aj statickou určitost úlohy:

	>	úloha tvarově neurčitá, staticky přeurčená
$i = i_S = v - u = r - n_p$	= 0	úloha tvarově a staticky určitá
	<	úloha tvarově přeurčená, staticky neurčitá

kde: i_S – stupeň statické určitosti
r – počet nezávislých podmínek rovnováhy
n_p – počet neznámých parametrů vazbových reakcí

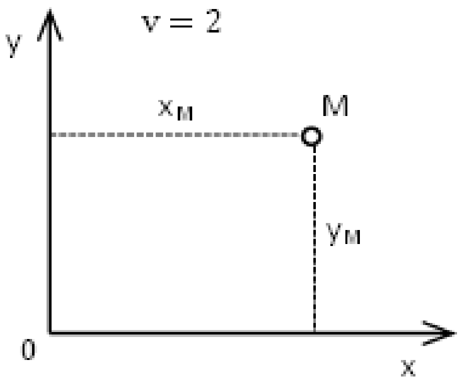
Staticky neurčitou úlohu nemůžeme řešit jenom metodami statiky. Takové úlohy řešíme v pružnosti a pevnosti, která určuje další, tzv. deformační podmínky.

3.HMOTNÝ BOD V ROVINĚ

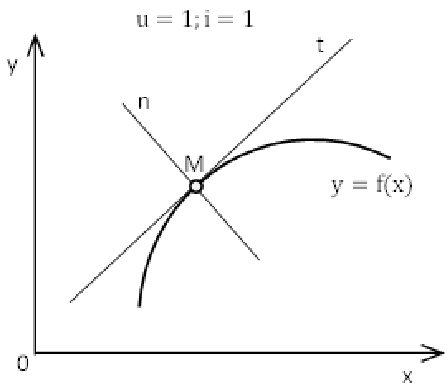
3.1. Stupně volnosti a vazbová závislost hmotného bodu v rovině

Polohu volného hmotného bodu M v rovině, určené souřadnicovou soustavou 0, x, y (Obr. 2.4) určují dvě nezávislé parametry x_M, y_M. Hmotný bod má proto dva stupně volnosti pohybu $v = 2$, tj. v rovině může vykonávat dva nezávislé pohyby (posuv v osy x a y) a jeho vazbová závislost je:

$$i = v - u = 2 - u \quad \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$



Obrázek 2.4

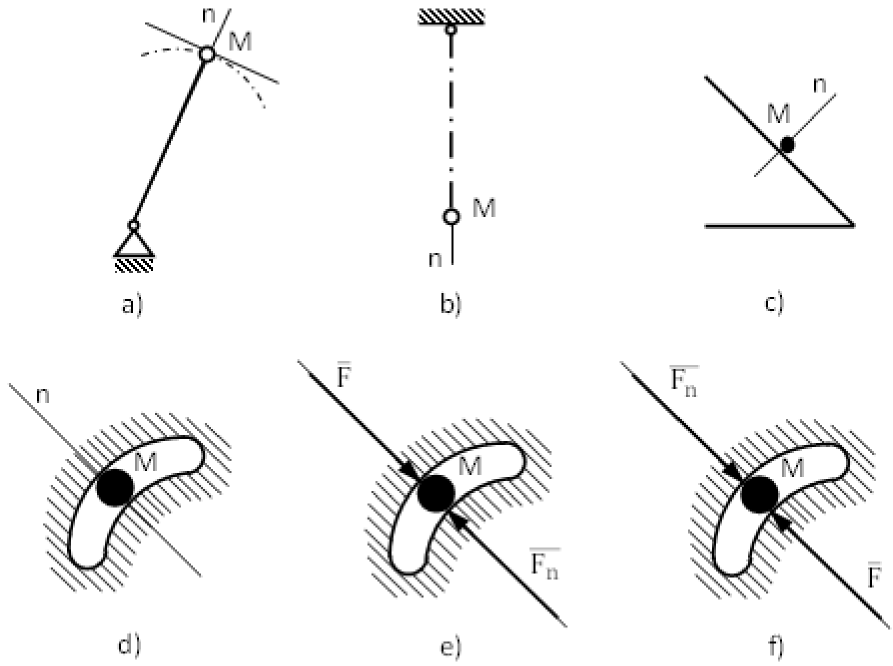


Obrázek 2.5

3.2. Vazby hmotného bodu v rovině

Hmotný bod v rovině vázaný ke křivce $y = f(x)$ má možnost pohybu pouze po tečně (Obr. 2.5). Ve směru normály má odebranou možnost pohybu, proto aj možná reakce vazby při zatížení hmotného bodu je normálová reakce. Poloha bodu je jednoznačně určená jedním údajem, např. souřadnicí $x_M; [y_M = f(x_M)]$, proto bod vázaný k rovinné křivce má jeden stupeň volnosti pohybu.

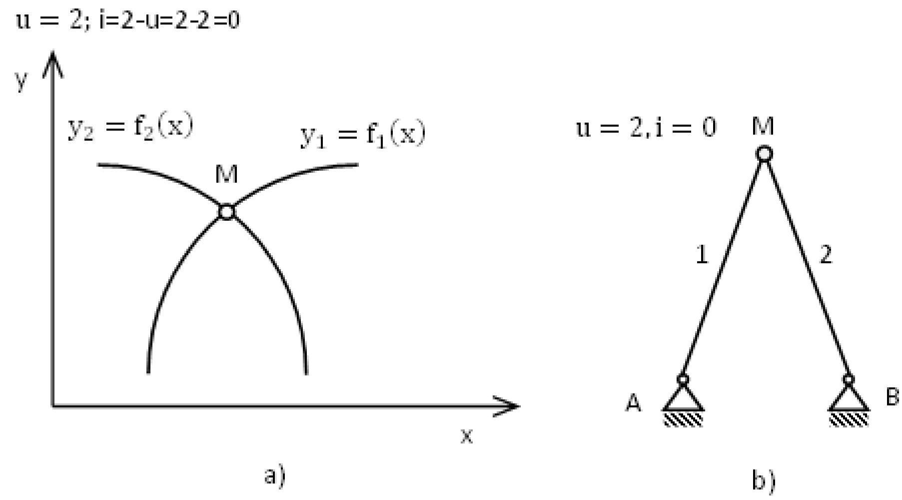
$$u = 1; i = 2 - u = 2 - 1 = 1$$



Obrázek 2.6

Realizace vázání bodu na jednu rovinnou křivku může být prutem (Obr. 2.6a), nebo drážkou, např. kámen v kulise (Obr. 2.6d). Tyhle vazby jsou oboustranné (nucené), může v nich vzniknout reakce na obě strany (Obr. 2.6e,f). Vazby lanem (Obr. 2.6b) a volným opřením (Obr. 2.6c) odebírají bodu v rovině taky jeden stupeň volnosti pohybu, ale jenom na jednu stranu – jedná se o vazby jednostranné (silové).

Bod vázaný na dvě křivky současně (Obr. 2.7a), má odebrané 2 stupně volnosti pohybu a nemá možnost pohybu. Takovou vazbu můžeme realizovat např. dvěma pruty (Obr. 2.7b).



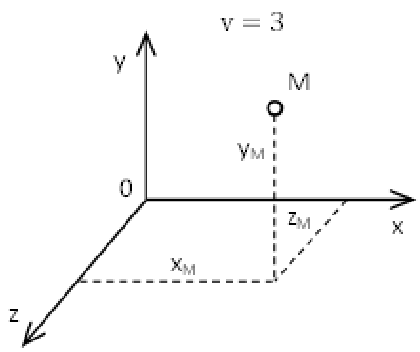
Obrázek 2.7

3.3. Hmotný bod v prostoru

3.3.1. Stupně volnosti a vazbová závislost hmotného bodu v prostoru

Poloha volného hmotného bodu M v prostoru je jednoznačně určena 3 parametry. V ortogonální souřadnicové soustavě 0, x, y, z sú to tři souřadnice: x_M, y_M, z_M (Obr. 2.8). Volný hmotný bod v prostoru má tři stupně volnosti pohybu $v = 3$, může vykonat tři nezávislé pohyby (posun ve směru osy x, y, z) a jeho vazbová závislost bude:

$$i = v - u = 3 - u \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

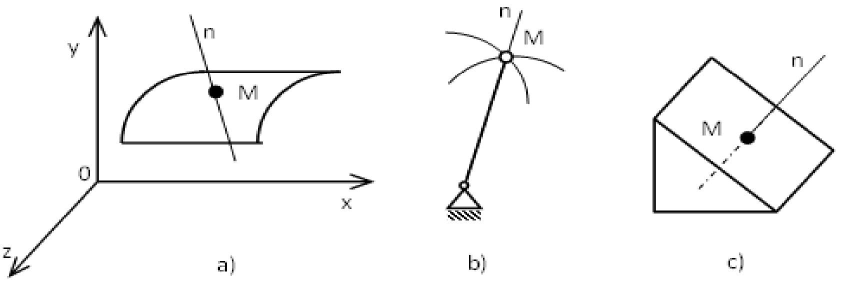


Obrázek 2.8

3.3.2. Vazby hmotného bodu v prostoru

Hmotný bod v prostoru můžeme vázat k ploše (Obr. 2.9a). Například prutem, nebo lanem ku kulové ploše (Obr.2.9b), uložením na rovinu (Obr. 2.9c) a pod. Tím mu odebereme jeden stupeň volnosti pohybu ve směru normály k ploše, resp. ve směru prutu.

$u = 1, i = 3 - u = 3 - 1 = 2$

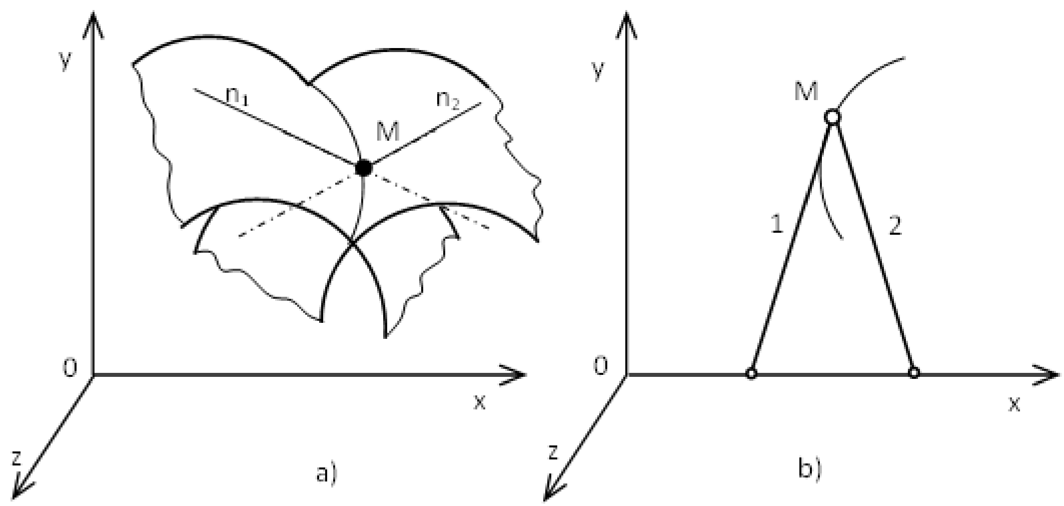


Obrázek 2.9

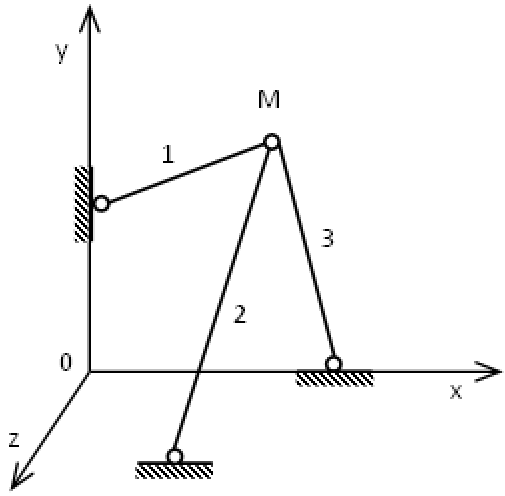
Pokud vážeme bod v prostoru ku dvěma plochám (Obr. 2.10a), odebereme mu tím dva stupně volnosti pohybu. Vážeme ho vlastně v jejich průsečnici, tj. k prostorové křivce. Realizaci téhle vazby je například vazba dvěma pruty (Obr. 2.10b).

$u = 2, i = 3 - u = 3 - 2 = 1$

Vázáním bodu ke třem plochám, které se v daném bodě přetínají, jsou mu odebrány všechny tři stupně volnosti. Takováto je například vazba třemi pruty, které však nesmí ležet v jedné rovině. Musejí vytvářet tzv. kozlík (Obr. 2.11).



Obrázek 2.10

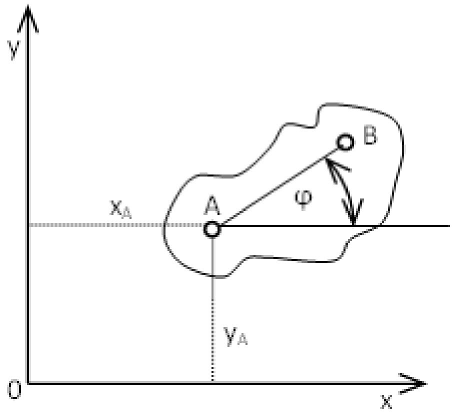


Obrázek 2.11

3.4. Těleso v rovině

3.4.1. Stupně volnosti tělesa v rovině

Polohu tělesa v rovině (0, x, y) jednoznačně určují tři parametry. Můžou to být souřadnice bodu A (x_A, y_A) a úhel φ spojnice bodů A a B (Obr. 2.12), nebo dvě souřadnice bodu A a jedna souřadnice bodu B. Druhé souřadnice bodu B je daná tím, že vzdálenost $\underline{AB}$ je konstantní.



Obrázek 2.12

Volné těleso v rovině má možnost vykonat tři nezávislé pohyby: posuvy ve směru souřadnicových os x a y a otočení kolem libovolného bodu, např. kolem bodu A, nebo B. Těleso v rovině má 3 stupně volnosti pohybu a jeho vazbová závislost je daná vztahem:

$$i = v - u = 3 - u \qquad \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix}$$

3.4.2. Vazby tělesa v rovině

Jednotlivými vazbami můžeme tělesu odebrat jeden, dva, nebo tři stupně volnosti. V každé vazbě může vzniknout vazbová reakce, které vznik závisí od typu zatěžující silové soustavy.

Vazby, které nechávají tělesu určitou pohyblivost zveme kinematické dvojice. Můžou to být kinematické dvojice první (u = 1), nebo druhé třídy (u = 2).

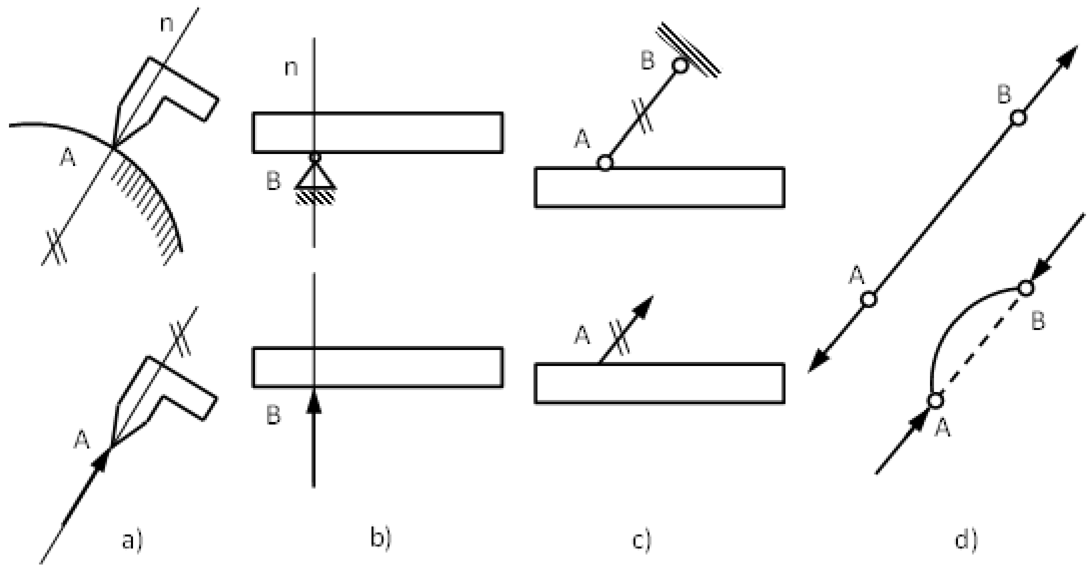
Vyšší, všeobecná, kinematická dvojice odebírá tělesu jeden stupeň volnosti (u = 1).

Ve vazbě opřením se jedno tělesa opírá hrotem o povrch druhého tělesa, přičemž povrchy těles pokládáme ze dokonale tuhé. Odebraná možnost pohybu a možná reakce jsou v společné normále (Obr. 2.13a).

Jeden stupeň volnosti pohybu odebereme tělesu i pomocí dalšího tělesa, tzv. binárního člena. Binární člen slouží jako sprostředkovatel vazby mezi rámem a tělesem, s kterým je vázaný rotační, nebo posuvní vaznou. Není zatížený žádnými vnějšími silami, působí na něj jenom reakce tělesa a rámu, které musí ležet na společné nositelce, musí být stejně velké a opačně orientované. Takové binární členy, používané jako vazby tělesa k rámu jsou:

- Posuvné lůžko (Obr. 2. 13b) – na jedné straně kloub, na druhé posuvní vedení – společná nositelka musí procházet přes kloub a současně být kolmá na vedení. Realizace vazby může být jednostranná nebo dvoustranná.

- Prut (Obr. 2.13c) – po obou stranách klouby, společná nositelka je v jejich spojnici. Vazba je oboustranná, prut může být tažený, ale i tlačený (Obr. 2.13d).



Obrázek 2.13

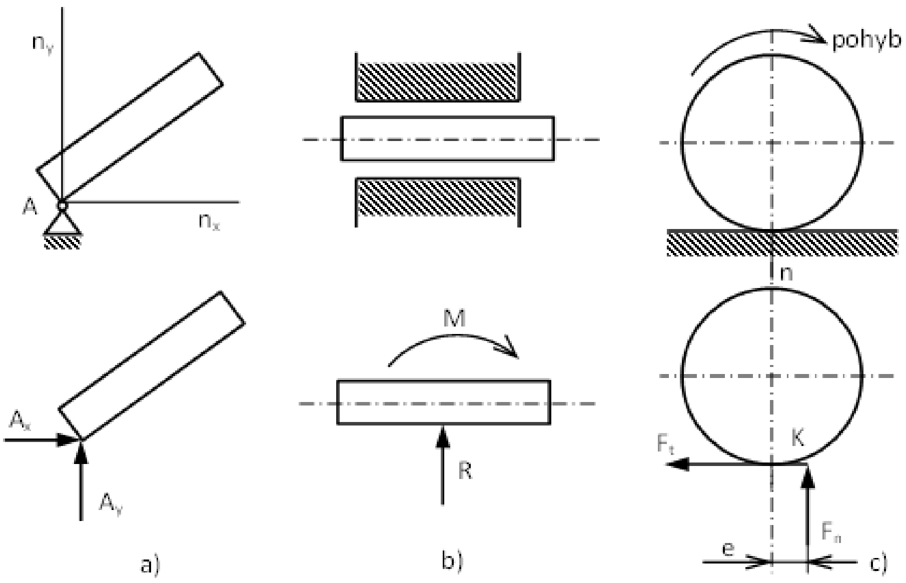
Nižší kinematické dvojice (u = 2) odebírají tělesu dva stupně volnosti pohybu. Patří k nim tyhle **vazby:**

- **Rotační vazba** (kloub) odebírá dva posuvy ve směru os x a y. Neznámí jsou dva parametry, např. dvě složky reakce, nebo velikost a směr reakce. Vazba ponechává tělesu možnost otáčení kolem stálého středu otáčení A.

- **Posuvná vazba** (posuvné vedení) ponechává možnost posunu v jednom směru a odebírá možnost posunu ve směru na něj kolmém a možnost otočení v rovině. Neznámé parametry jsou velikost síly a momentu.

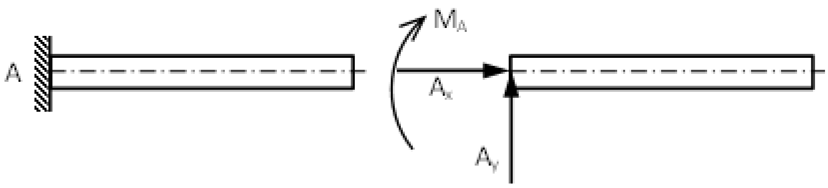
- **Valivá vazba** podmíněná třením mezi tělesy, odebírá možnost dvou posuvů – ve směru normály a tečny (reakce F_N a F_T), umožňuje válivý pohyb beze smyku, tj. možnost otočení tělesa kolem tzv. okamžitého středu otáčení.

$$u = 2, i = 3 - u = 3 - 2 = 1$$



Těleso spojíme napevno s jiným tělesem, např. s rámem tzv. vetknutím (Obr. 3.7), které odebere tělesu v rovině všechny tři stupně volnosti pohybu.

$$u = 3, i = 3 - u = 3 - 3 = 0$$

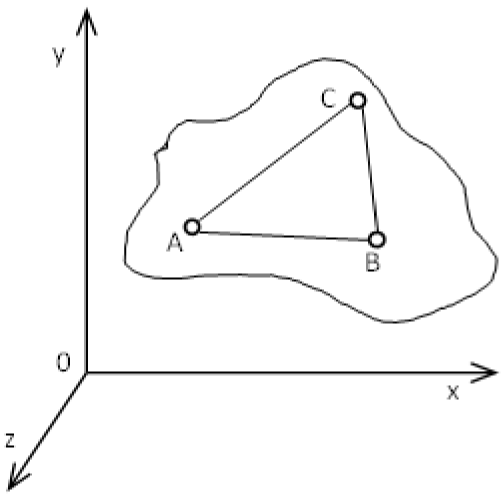


4.TĚLESO V PROSTORU

4.1. Stupně volnosti a vazbová závislost tělesa v prostoru

Poloha tělesa v prostoru 0, x, y, z je jednoznačně určena šesti parametry. Můžou to být 3 souřadnice bodu A, dvě souřadnice bodu B a jedna souřadnice bodu C (Obr.). Ostatní souřadnice bodů B a C jsou vázané stálými vzdálenostmi mezi body. Teda pro těleso v prostoru je v = 6. Volné těleso v prostoru má možnost vykonat šest nezávislých pohybů: posuvy ve směru os x, y a z a otočení kolem těchto tří souřadnicových os. Má 6 stupňů volnosti pohybu a jeho vazbová závislost je:

$$i = v - u = 6 - u \quad \begin{matrix} > \\ = 0 \\ < \end{matrix}$$



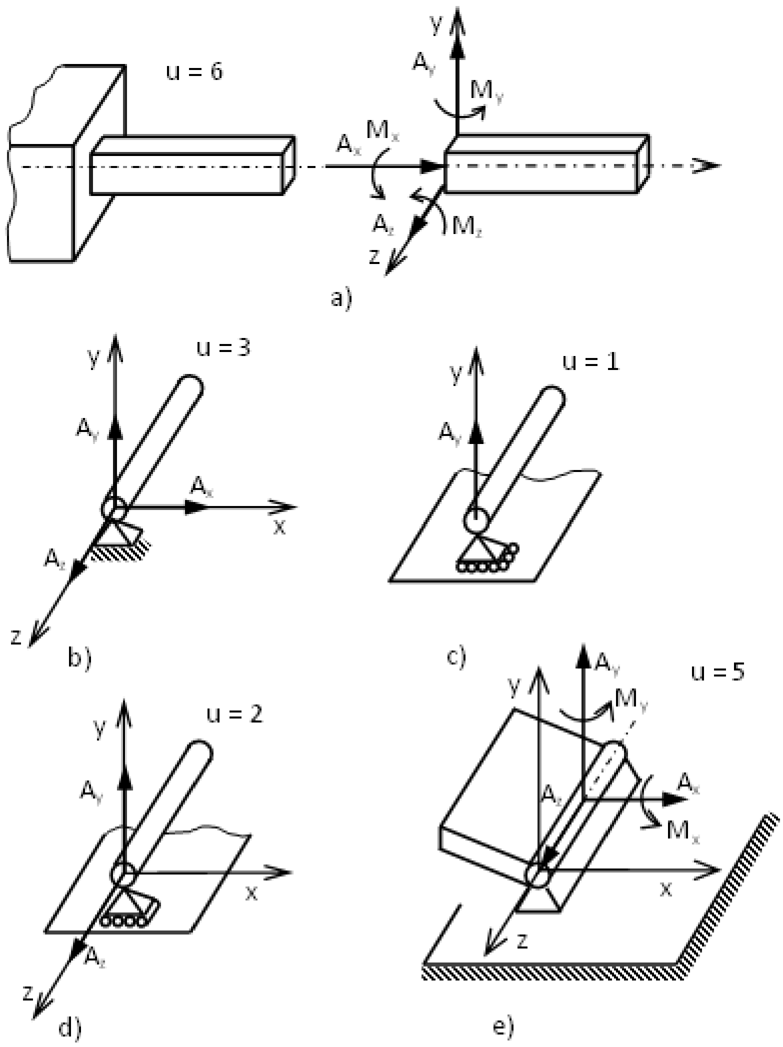
4.2. Vazby tělesa v prostoru

Dle typu vazby můžeme tělesu v prostoru jednou vazbou odebrat jeden až šest stupňů volnosti pohybu. Na Obr. jsou znázorněny jednotlivé typy vazeb tělesa v prostoru s vyznačenýma reakcemi, které v nich po zatížení tělesa mohou vzniknout:

- Jeden stupeň volnosti pohybu (u = 1) odebírají tělesu v prostoru vazba posuvným lůžkem na kuličkách (Obr. c) a vazba prutem.
- Dva stupně volnosti pohybu (u = 2) odebírá tělesu v prostoru vazba posuvným lůžkem na válečcích (Obr. d).

- Tři stupně volnosti pohybu (u = 3)odebírá tělesu v prostoru vazba prostorovým kloubem

  (Obr. b)
- Pět stupňů volnosti pohybu (u = 5)odebírá vazba tzv. válcovým kloubem (Obr. e)
- Pevným spojením – vetknutím (Obr. a) odebereme tělesu všech šest stupňů volnosti pohybu (u = 6).

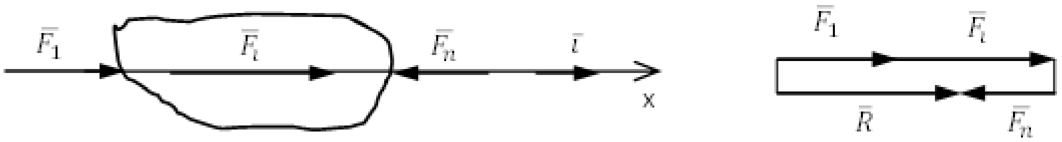


5. CENTRÁLNÍ ROVINNÉ SILOVÉ SOUSTAVY, ROVNOVÁHA HMOTNÉHO BODU

5.1. Přímková silová soustava – PSS

5.1.1. Nahrazení přímkové silové soustavy

Pokud na daný objekt všechny sily působí v jedné přímce, můžeme jich nahradit jednou silou $\underline{R}$ (výslednicí), které nositelka je totožná s nositelkou sil. Ať os x s jednotkovým vektorem $\underline{i}$ je nositelkou sil $\underline{F_i}$ (Obr.).

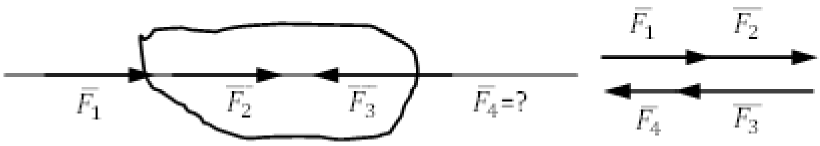


Pokud $\underline{R} = R.\underline{i}$, $\underline{F_i} = F_i.\underline{i}$, pak je $R.\underline{i} = \sum F_i.\underline{i}$. Velikost výslednice je pak rovná algebraickému součtu sil $\underline{R} = \sum \underline{F_i}$.

5.2. Rovnováha přímkové silové soustavy

Podmínkou rovnováhy PSS je $\underline{R} = \underline{0}$, čili $\sum \underline{F_i} = \underline{0}$.

Při grafickém řešení táhle rovnice značí uzavřený, tzv. silový obrazec (Obr.).



Při analytickém řešení je pak podmínka rovnováhy vyjádřená ve skalárním tvaru jedinou silovou podmínkou rovnováhy $R = 0$, čili $\Sigma Fi = 0$.

Rovnováhu PSS můžeme vyjádřit i použitím momentové podmínky k libovolnému bodu B (Obr.), který neleží na nositelce PSS.

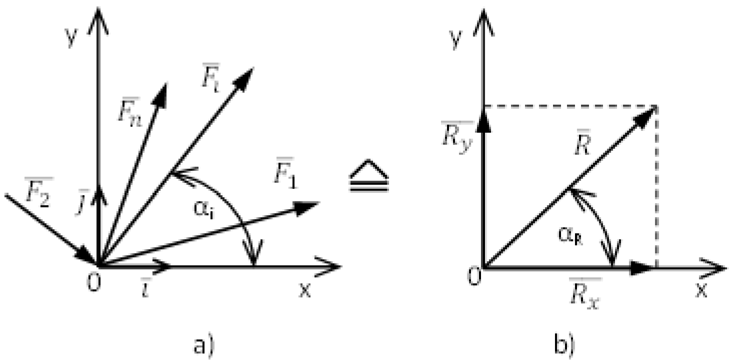
$\sum \quad M_{iB} = p \sum \quad F_i = 0$

Pro přímkovou silovou soustavu existuje pouze jediná nezávislá statická podmínka, tj. ze statických podmínek rovnováhy můžeme vypočítat pouze jeden neznámý parametr.

5.3. Centrální rovinná silová soustava – CRSS

5.3.1. Nahrazení centrální rovinné silové soustavy

Ať všechny sily $\underline{F_i}$ dané silové soustavy přecházejí bodem 0 a leží v jedné rovině 0, x, y (Obr. a). Pak silovou soustavu možno nahradit výslednicí $\underline{R} = \underline{S}$, která prochází bodem 0 (Obr. b).



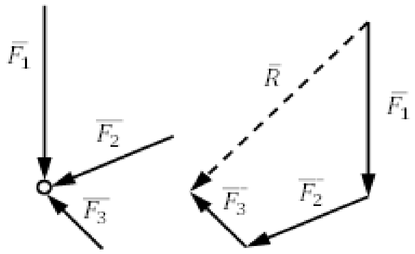
$\underline{R} = \sum \quad \underline{F_i}$

Po vyjádření vektorů sil pomocí jejich složek je $R_x.\underline{i} + R_y.\underline{j} = \sum \quad F_{ix}.\underline{i} + \sum \quad F_{iy}.\underline{j}$.

- Pokud vynásobíme rovnici $R_x.\underline{i} + R_y.\underline{j} = \sum \quad F_{ix}.\underline{i} + \sum \quad F_{iy}.\underline{j}$ skalárně jednotkovými vektory $\underline{i}$ a $\underline{j}$, budou podmínky nahrazení CRSS vyjádřené dvěma skalárními (složkovými) rovnicemi: $R_x = \sum \quad F_{ix} = \sum \quad F_i \cos \cos \alpha_i$ a $R_y = \sum \quad F_{iy} = \sum \quad F_i \sin \sin \alpha_i$. Velikost a směr výslednice bude pak $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, $\cos \cos \alpha_R = \frac{R_x}{R}$.

- Při grafickém řešení výslednice $\underline{R}$ prochází působištěm sil 0 (Obr.) a je určena jich vektorovým součtem v tzv. silovém obrazci.

$$\underline{R} = \sum \underline{F_i}$$
$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3}$$



6.ROVNOVÁHA CENTRÁLNÍ ROVINNÉ SILOVÉ SOUSTAVY

Podmínkou rovnováhy je $\underline{R} = \underline{0}$, čili $\sum \underline{F_i} = \underline{0}$.

- Při analytickém řešení můžeme napsat dvě nezávislí podmínky rovnováhy, a to buď dvě složkové rovnice, nebo složkové rovnice můžeme nahradit momentovými, využije Varignonovu vetu.

- alternativa složkové rovnice
  $R_x = 0$, čiže $\sum F_{ix} = 0$
  $R_y = 0$, čiže $\sum F_{iy} = 0$

- alternativa momentové rovnice

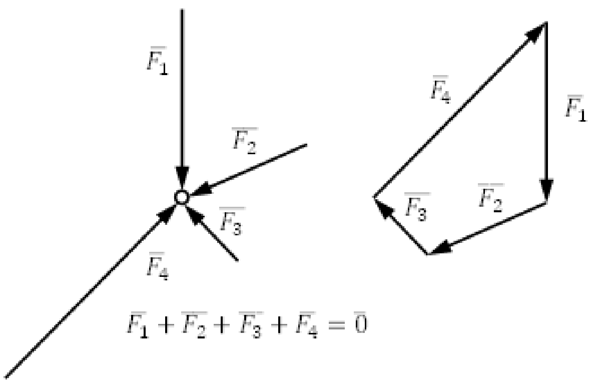
  $(\sum M_i)_A = 0$
  $(\sum M_i)_B = 0$
  Body A, B a působiště sil 0 nesmějí ležet na jedné přímce!

- alternativa: 1 složková a 1 momentová rovnice

  $\sum F_{ix} = 0$
  $(\sum M_i)_B = 0$

- Bod B nesmí ležet na ose x! Spojnice působiště sil s bodem B nesmí být kolmá na os, do které sily promítáme.

- Při grafickém řešení (Obr.) vycházíme z podmínky uzavření silového obrazce s orientací sil za sebou, který odpovídá vektorové podmínce rovnováhy $\underline{R} = \underline{0}$.

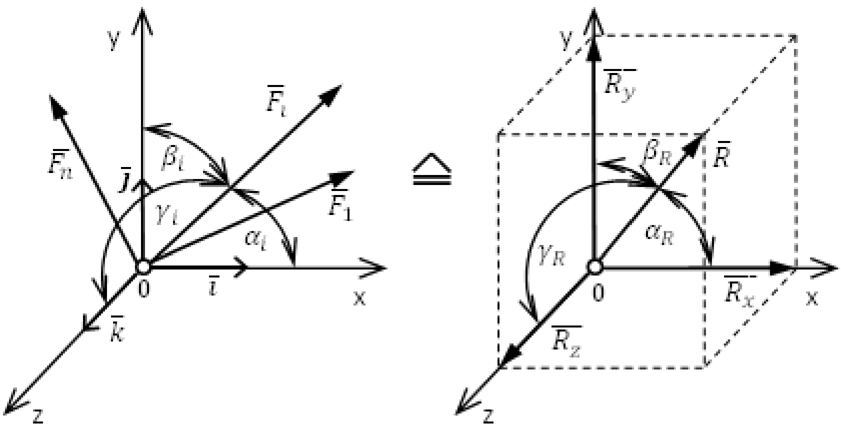


Pro CRSS můžeme napsat len dvě statické podmínky, z kterých můžeme určit dva neznámé parametry.

6.1. Centrální prostorová silová soustava – CPSS

6.1.1. Nahrazení centrální prostorové silové soustavy

V jednom bodě působí prostorová silová soustava n sil. Každá sila této silové soustavy ať je určená velikostí a směrem (Obr. a). Všechny sily je možné nahradit jedinou silou, jejich výslednicí $\underline{R}$ (Obr. b), která musí procházet společným působištěm sil. Sila $\underline{R}$ jako výslednice úplně nahradí danou CPSS.



a) b)

V pravoúhlý souřadnicové soustavě 0, x, y, z můžeme výslednici $\underline{R}$ rozložit na složky

$$\underline{R_x}, \underline{R_y}, \underline{R_z}$$
$$\underline{R} = \underline{R_x} + \underline{R_y} + \underline{R_z}$$

Podmínkami nahrazení CPSS jsou pak vztahy pro určení výslednice

$$R_x = \sum \quad F_{ix} = \sum \quad F_i \cos \cos \alpha_i$$
$$R_y = \sum \quad F_{iy} = \sum \quad F_i \cos \cos \beta_i$$
$$R_z = \sum \quad F_{iz} = \sum \quad F_i \cos \cos \gamma_i$$

Velikost výslednice je pak $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.

Poloha výslednice je určena: $\cos\cos\alpha_R = \frac{R_x}{R}$, $\cos\cos\beta_R = \frac{R_y}{R}$, $\left(\cos\cos\gamma_R = \frac{R_z}{R}\right)$.

6.1.2. Rovnováha centrální prostorové silové soustavy

CPSS bude v rovnováze, když její výslednice $\underline{R}$ bude rovná nule. (To značí, že její výsledný posuvný a otáčivý účinek k libovolnému bodu v prostoru je roven nule).

- **alternativa: složkové rovnice**
  Aby výslednice byla nulová, musí být všechny její tři průměty rovné nule.
  $\sum F_{ix} = 0$
  $\sum F_{iy} = 0$
  $\sum F_{iy} = 0$

- **alternativa: momentové rovnice**
  Na základě Varignonovyj věty můžeme vyjádřit podmínky rovnováhy i momentovými rovnicemi vzhledem k libovolným osám v prostoru.
  $\left(\sum M_i\right)_a = 0$
  $\left(\sum M_i\right)_b = 0$
  $\left(\sum M_i\right)_c = 0$
  Žádná z os a, b, c nesmí procházet společným působištěm silové soustavy a osy a, b, c se nesmějí protínat v jednom bodě anebo být vzájemně rovnoběžné.

- **alternativa: 2 momentové a 1 složková rovnice**
  $\left(\sum M_i\right)_a = 0$
  $\left(\sum M_i\right)_b = 0$
  $\sum F_{ix} = 0$
  Osy a, b nesmějí procházet působištěm silové soustavy. Nesmějí se protínat v rovině, která prochází přes působiště CPSS a je kolmá k ose x. Osy a, b nesmějí být vzájemně rovnoběžné, pokud jsou obě současně rovnoběžné se zmíněnou osou.

- **alternativa: 2 složkové a 1 momentová rovnice**

  $\sum F_{ix} = 0$

  $\sum F_{iy} = 0$

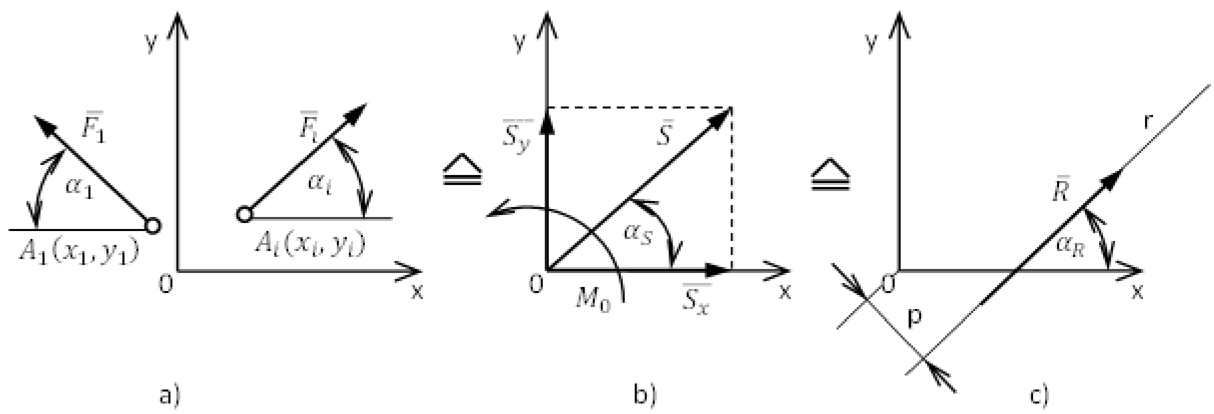
  $\left(\sum M_i\right)_a = 0$

  Osa a nesmí procházet přes působiště CPSS a nesmí být kolmá na rovinu určenou osami x, y.

  Podobně jak v rovině, aj v prostoru při analytickém řešení vždy nejdřív předpokládáme orientaci neznámých sil. Pokud řešením dostaneme pro danou neznámou znaménko kladné, volili jsme správnou orientaci, pokud dostaneme znaménko záporné, skutečné orientace této síly je opačná, jako jsme předpokládali.

7. VŠEOBECNÉ SILOVÉ SOUSTAVY. ROVNOBĚŽNÉ SILOVÉ SOUSTAVY. ROVNOVÁHA TĚLESA.

7.1. Všeobecná rovinná silová soustava. Analytické řešení VRSS



Všeobecnou rovinnou soustavu tvoří sily obecně rozptýlení v rovině (např. v rovině x, y na Obr. a). Účinek každé sily $\underline{F}$ k počátku souřadnicové soustavy 0, x, y bude posuvný $\underline{F_i}$ a otáčivý $\underline{M_{i0}}$. Výsledný posuvný a otáčivý účinek silové soustavy k počátku v bodě 0 bude

$$\underline{S} = \sum \underline{F_i}$$
$$\underline{M_0} = \sum \underline{M_{i0}}$$

Můžou nastat případy:

$\underline{S} \neq \underline{0}$, $\underline{M_0} \neq \underline{0}$ – soustava má výslednici $\underline{R}$ – přechází mimo bodu 0
$\underline{S} \neq \underline{0}$, $\underline{M_0} = \underline{0}$ – soustava má výslednici $\underline{R}$ – přechází přes bod 0
$\underline{S} = \underline{0}$, $\underline{M_0} \neq \underline{0}$ – soustavu nahradí silová dvojice v rovině x, y
$\underline{S} = \underline{0}$, $\underline{M_0} = \underline{0}$ – podmínky rovnováhy VRSS

7.2. Nahrazení VRSS ve zvoleném počátku

Velikost momentu M_{i0} vyjádříme s použitím Varignonovy věty (Obr. a)
$M_{i0} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}$

VRSS ve zvoleném počátku é (Obr. b)nehradíme třemi skalárními rovnicemi:
$S_x = \sum \quad F_{ix} = \sum \quad F_i \cos\cos\alpha_i$
$S_y = \sum \quad F_{iy} = \sum \quad F_i \sin\sin\alpha_i$
$M_0 = \sum \quad M_{i0} = \sum \quad (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = \sum \quad F_i(x_i \sin\sin\alpha_i - y_i \cos\cos\alpha_i) = \sum \quad F_i p_i$

7.3. Nahrazení VRSS výslednicí

$\underline{S}$ a $\underline{M_0}$ nahradíme výslednici $\underline{R}$, přičemž $R = S$ a $\alpha_S = \alpha_R$, posunutou od počátku 0 o vzdálenost p (Obr. c). Velikost výslednice určíme ze vztahu:

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, přičemž
$R_x = S_x = \sum \quad F_{ix}$
$R_y = S_y = \sum \quad F_{iy}$

Uhel α_R a polohu p určíme ze vztahů
$\cos\cos\alpha_R = \frac{R_x}{R},\ p = \frac{M_0}{R}$

7.4. Podmínky rovnováhy VRSS

Podmínky rovnováhy $\underline{S} = \underline{0}$, $\underline{M_0} = \underline{0}$ určují tři skalární rovnice rovnováhy:

- alternativa: 2 složkové rovnice, 1 momentová

  $$\begin{aligned} R_x &= 0, & & \sum \quad F_{ix} = 0 \\ R_y &= 0, & \Rightarrow & \sum \quad F_{iy} = 0 \\ M_0 &= 0, & & \sum \quad M_{i0} = 0 \end{aligned}$$

- alternativa: 3 momentové rovnice

  $\left(\sum \quad M_i\right)_A = 0$
  $\left(\sum \quad M_i\right)_B = 0$
  $\left(\sum \quad M_i\right)_C = 0$
  Body A, B, C nesmějí ležet na jedné přímce – mohla by na ní působit výslednice a přitom podmínky rovnováhy by byli splněné.

- alternativa: 2 momentové a 1 složková rovnice
  $\left(\sum M_i\right)_A = 0$
  $\left(\sum M_i\right)_B = 0$
  $\sum F_{ix} = 0$
  Spojnice bodů A, B nesmí být kolmá na os x (na os, ve směru které píšeme silovou rovnici) – mohla by ta této přímce být výslednice a přitom by platili podmínky rovnováhy.

8. VŠEOBECNÁ PROSTOROVÁ SILOVÁ SOUSTAVA

Všeobecnou prostorovou silovou soustavu tvoří sily libovolně rozložené v prostoru. Je to nejvšeobecnější typ silové soustavy, pro kterou platí:

$\underline{S} \neq \underline{0}$, $\underline{M}_0 \neq \underline{0}$, $\underline{S}.\underline{M}_0 \neq 0$

Jestliže ve všeobecnosti $\underline{S}$ a M_0 nejsou vzájemně kolmé, nemůžeme VPSS nahradit jednou výslednicí.

8.1. Nahrazení VPSS ve zvoleném počátku

Mějme danou VPSS ve zvoleném počátku 0, (Obr. a). Účinek i-tej síly v bodu 0 je

- posuvný $\underline{F_i}$
- otáčivý $\underline{M_{i0}} = \underline{r_i} \times \underline{F_i}$

Výsledný účinek od všech sil dané silové soustavy je v bodě 0

- posuvný (Obr. b) $\underline{S} = \sum \quad \underline{F_i}$
- otáčivý (Obr. c) $\underline{M_0} = \sum \quad \underline{M_{i0}}$

$\underline{M_0} = \sum \quad \underline{M_{i0}} \sum \quad \underline{r_i} \times \underline{F_i} = \sum \quad \left| \underline{i}\, \underline{j}\, \underline{k}\; x_i\, y_i\, z_i\, F_{ix}\, F_{iy}\, F_{iz} \right|$

Velikost a směr posuvného a otáčivého účinku

$\underline{S} = \underline{S_x} + \underline{S_y} + \underline{S_z} = S_z.\underline{i} + S_y.\underline{j} + S_z.\underline{k}$

$\underline{M_0} = \underline{M_x} + \underline{M_y} + \underline{M_z} = M_z.\underline{i} + M_y.\underline{j} + M_z.\underline{k}$

Účinek VPSS vzhledem k bodu 0 je vyjádřený šesti rovnicemi

$S_x = \sum \quad F_{ix} = \sum \quad F_i\, cos\, cos\, \alpha_i$

$S_y = \sum \quad F_{iy} = \sum \quad F_i\, cos\, cos\, \beta_i$

$S_z = \sum \quad F_{iz} = \sum \quad F_i\, cos\, cos\, \gamma_i$

$M_x = \sum \quad M_{ix} = \sum \quad \left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right)$

$M_y = \sum \quad M_{iy} = \sum \quad \left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right)$

$M_x = \sum \quad M_{ix} = \sum \quad \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right)$

Velikost a poloha výsledného posuvného účinku $\underline{S}$ (obr. d) se určí vztahy:

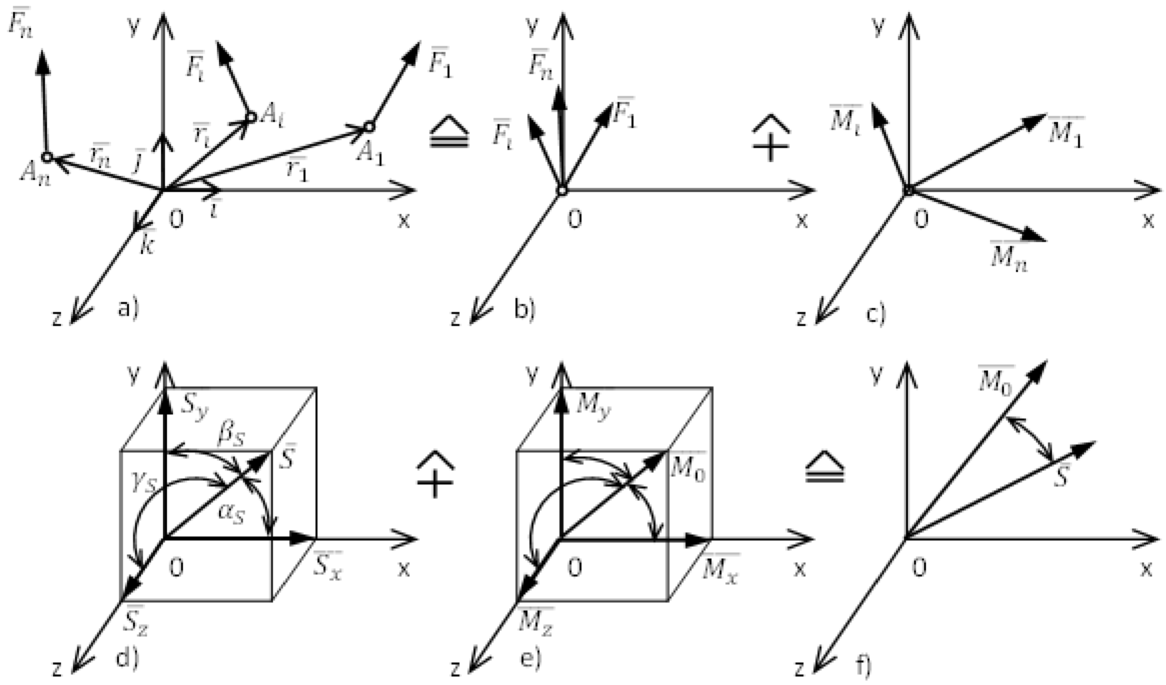
$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$

$cos\, cos\, \alpha_S = \frac{S_x}{S}$, $cos\, cos\, \beta_S = \frac{S_y}{S}$, $\left(cos\, cos\, \gamma_S = \frac{S_z}{S}\right)$

Velikost a poloha výsledného otáčivého účinku M_0 (Obr. e) je:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$cos\ cos\ \alpha_M \ = \frac{M_x}{M_0},\ cos\ cos\ \beta_M \ = \frac{M_y}{M_0},\ \left(cos\ cos\ \gamma_M \ = \frac{M_z}{M_0}\right)$$



Uhel φ (Obr. f) můžeme určit pomocí skalárního součinu

$$\underline{S} \,.\, \underline{M_0} = S\, M_0\ \ cos\ cos\ \varphi$$

Odkud

$$cos\ cos\ \varphi \ = \frac{\underline{S}\underline{M_0}}{SM_0}$$

8.2. Podmínky rovnováhy VPSS

Podmínkami rovnováhy všeobecné prostorové silové soustavy jsou $\underline{S} = 0$, $\underline{M_0} = 0$, tj.
$\sum \underline{F_i} = \underline{0}$, $\sum \underline{M_{i0}} = \underline{0}$

V skalárním tvaru je to šest rovnic rovnováhy:

- alternativa: tři silové a tři momentové rovnice napsaný výhodně k souřadnicovým osám

$$\sum F_{ix} = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0$$
$$\sum F_{iz} = 0$$
$$\sum M_{ix} = 0$$
$$\sum M_{iy} = 0$$
$$\sum M_{iz} = 0$$

Silové dvojice můžeme obdobně, jako v předchozích kapitolách, nahradit momentovými rovnicemi k jiným libovolným osám, ale momentové rovnice nemůžeme nahradit dalšími silovými rovnicemi. Musíme mít minimálně tři momentové rovnice k třem různým libovolným osám. Takto dostaneme další alternativy vyjádření podmínek rovnováhy.

- alternativa: 2 silové a 4 momentové rovnice

- alternativa: 1 silová a 5 momentových rovnic

- alternativa: 6 momentových rovnic k osám o_1 až o_6

Osy o1 až o6 (nemusejí být mezi nimi osy x, y, z) nesmějí být vzájemně rovnoběžné a nesmějí být protnutelné jednou přímkou.

9.STATICKÁ ANALÝZA SOUSTAV TĚLES

Soustavou těles nazýváme konstrukci pozůstávající alespoň z dvou těles kromě rámu. Jednotlivá tělesa soustavy jsou vázaná vzájemně mezi sebou, jako i k rámu. Vazby, kterými jsou jednotlivé tělesa vázané k rámu se nazývají vnější vazby, vazby mezi tělesy navzájem jsou vazby vnitřní. Dle typu vzájemných vazeb vznikají soustavy s různým rozsahem pohyblivosti a různým charakterem pohybu jednotlivých těles.

Dle charakteristických vlastností dělíme soustavy těles na rovinné a prostorové, nepohyblivé a pohyblivé, tvarově a staticky určité a neurčité.

9.1. Tvarová a statická určitost rovinných soustav těles

Tvarovou určitost (pohyblivost) soustavy těles posuzujeme pomocí vazbové závislosti. Postup je analogický jako při určování pohyblivosti tělesa.

Vzájemné spojení dvou těles nazýváme kinematickou dvojicí. V případě rovinných soustav těles rozdělujeme kinematické dvojice dle charakteru konstrukce na rotační, posuvní a válivé, které odebírají soustavě po dvou stupních volnosti pohybu a všeobecné, které odebírají soustavě jeden stupeň volnosti pohybu.

Ať se soustava skládá z n´ těles, z kterých jedno jsme upravili, tj. vytvořili jsme z něho rám. Před spojením mají táto tělesa

$v = 3(n' - 1) = 3n$
stupňů volnosti pohybu, kde $n = n' - 1$ je počet těles kromě rámu. Pokud soustava kromě „n“ těles obsahuje „m“ hmotných bodů, počet stupňů volnosti pohybu takové soustavy před vázáním je
$v = 2m + 3n.$

Celkovou tvarovou určitost soustavy posuzujeme dle vztahu vazbové závislosti
$i = v - u_{vnitřní} - u_{vnější}$
- $u_{vnitřní}$ – počet stupňů volnosti odebraných vnitřními vazbami
- $u_{vnější}$ – počet stupňů volnosti odebraných vnějšími vazbami.

Při hlubším rozboru tvarové určitosti soustavy posuzujeme kromě celkové tvarové určitosti aj tvarovou určitost vnitřní a vnější, přičemž můžou nastat případy:

- Celkovou tvarovou určitost posuzujeme s ohledem na vnější a vnitřní vazby, kde výsledný počet stupňů volnosti pohybu soustavy je daný vztahem

		celkově tvarově neurčitá
$i_c = v - u_{vnitřní} - u_{vnější}$	= 0	celkově tvarově určitá
	<	celkově tvarově přeurčená

- Při zkoumání vnitřní tvarové určitosti bereme v úvahu jenom vnitřní vazby, tj. vazby mezi tělesy tvořícími soustavu. Určujeme ji vazbovou závislostí

	>	vnitřně tvarově neurčitá
$i_c = v - u_{vnitřní} - v_{ST}$	= 0	vnitřně tvarově určitá
	<	vnitřně tvarově přeurčená

kde: $u_{vnitřní}$ - počet stupňů volnosti odebraných vnitřními vazbami
v_{ST} – počet stupňů pohybu soustavy, uvažované jako jedno tuhé těleso, vzhledem na rám. Pro soustavu uvažovanou jako jedno, tzv. těleso v rovině $v_{ST} = 3$.

- Při posuzování vnější tvarové určitosti bereme v úvahu len vnější vazby, kterými je soustava vázaná k rámu a soustavu považujeme za jedno tuhé těleso. Určujeme ji dle vazbové závislosti

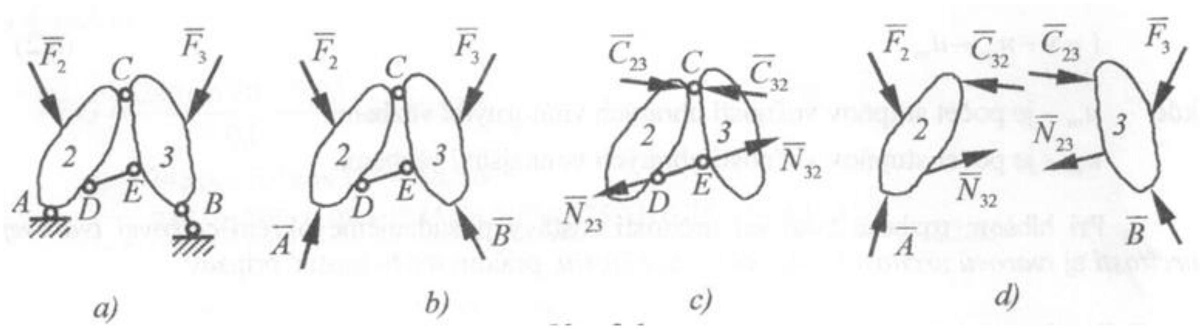
	>	zvenčí tvarově neurčitá
$i_c = v_{ST} - u_{vnější}$	= 0	zvenčí tvarově určitá
	<	zvenčí tvarově přeurčená

Soustava, která je celkově tvarově určitá, může být vnitřně tvarově neurčitá, např. k-krát, ale současně musí být zvenčí tvarově k-krát přeurčená. Pozor, opačně to neplatí, protože při vnější tvarové neurčitosti se soustava vzhledem na rám pohybovat.

9.2. Princip statického řešení soustav těles

Při statickém řešení soustav těles vycházíme z věty o rovnováze sil. O silách, které působí na soustavu těles (Obr. a) v její rovnovážném stavu, můžeme konstatovat této skutečnosti:

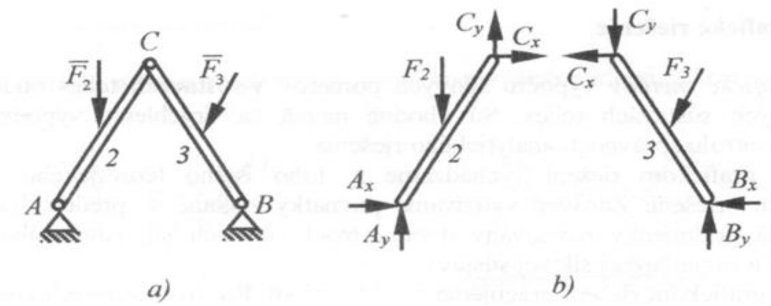
- Všechny vnější sily (zatěžující i reakce) působící na soustavové těleso, jsou v rovnováze (Obr. b)
- Všechny vnitřní síly jsou vzhledem na axiomu akce a reakce osobitě v každé vazbě a a současně ve všech vazbách vzájemně ve formální rovnováze (Obr. c).
- Jednotlivé silové soustavy pozůstávající vždy ze všech sil působících na každé těleso osobitě, nebo libovolnou skupinu těles, jsou v rovnováze (Obr. d)



9.3. Analytické (výpočetní) řešení soustav těles

Základní metodou statického řešení soustav je metoda uvolnění. Podstata metody spočívá v uvolnění jednotlivých členů soustavy (skupiny členů nebo celé soustavy) a sestavení odpovídajících podmínek rovnováhy. Pokud se soustava skládá z „*n*“ těles bez rámu a „m“ hmotných bodů, pak pro její rovnováhu máme k dispozici $r = 3n + 2m$ nezávislých rovnic rovnováhy, z kterých při staticky určité úloze můžeme vypočítat stejný počet neznámých parametrů reakcí a přídavných sil.

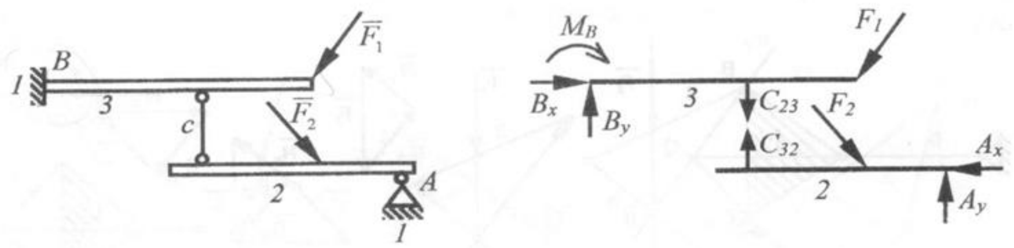
Pro vnější síly působící na soustavu těles, jako i pro síly působící na určitou skupinu těles soustavy máme k dispozici tři podmínky rovnováhy. Například pro výpočet reakcí A_X, A_Y, B_X, B_Y, C_X, C_Y použijeme tři a tři rovnovážní rovnice pro uvolněná tělesa 2 a 3 (Obr. b) soustavy těles z Obr. a.



S ohledem na řešitelnost soustavy těles dělíme soustavy na jednoduché a složité.

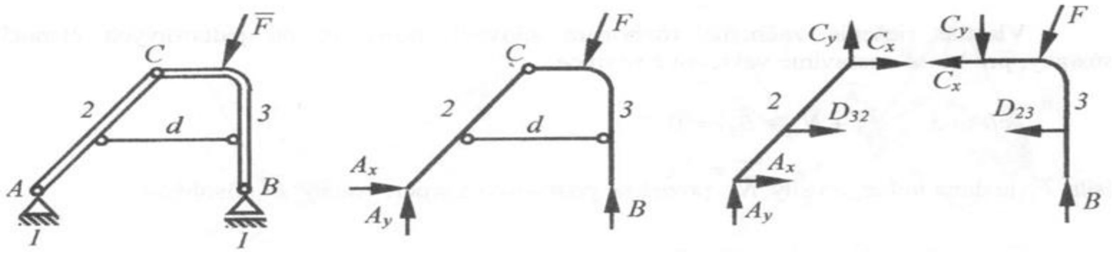
Jednoduché soustavy

- Při $i_{vnější} \neq 0$ se dají vyřešit postupním řešením rovnováhy jej členů (Obr.).



Z rovnováhy tělesa 2 určíme A_X, A_Y, $C_{32} = C_{23}$; z rovnováhy tělesa 3 B_X, B_Y, M_B.

- Při $i_{vnější} = 0$ se soustava dá vyřešit nejprve jako celek a pak následně můžeme postupně řešit rovnováhy jednotlivých jej členů (Obr.)



- Mezi jednoduché patří i soustavy obsahující trojkloubový nosník.
    - Složité soustavy jsou takové, které se nedají přímo řešit a neobsahují trojkloubový nosník

10. ROVINNÉ PRUTOVÉ SOUSTAVY

Osobitým případem nepohyblivých soustav těles jsou tzv. příhradové konstrukce, s kterými se střetáváme v různých stavebních konstrukcích, jako jsou mosty, stožáre, jeřáby, střešní konstrukce.

Dle prostorového uspořádaní konstrukce a typu silové soustavy vnějších sil dělíme příhradové konstrukce na prostorové a rovinné.

Zatížení příhradových konstrukcí může být soustředěné v jednom místě (břemeno zdvíhané jeřábem) nebo spojité (tíž vozovky, vlastní tíž konstrukce). V některých případech je působení vnějšího zatížení trvalé, jindy se mění s časem.

Pro řešení příhradových konstrukcí je potřebné vytvořit vhodný statický výpočetní model, který vznikne na základě těchto zjednodušujících předpokladů:

- Prvky tvořící příhradovou konstrukci můžeme považovat za jednorozměrná tělesa upevněné ke konstrukci dvěma vazbami. Jsou to pak binární členy.
- Spojení všech binárních členů považujeme za kloubové. Je to možné i v případě nýtovaných, resp. svářených styčníků, pokud spojované prvky nejsou moc krátké. Podmínkou je vzájemné uspořádání prvků v jednotlivých uzlech tak, aby se těžiskové osy všech prvků spojených v jednom uzlu protínali v jednom bodě, který se nazývá styčný bod.
- Se zatížením konstrukce uvažujeme jenom v styčných bodech. Spojité zatížení prvků konstrukce redukujeme do dvou styčníků, kterými je prvek upevněn ke konstrukci.

Takhle vytvořený výpočetní model nazýváme prutová soustava. jde o soustavu n nehmotných, nezatížených těles – prutů, které jsou vzájemně spojené v kloubech, tzv. styčnících a v těchto styčnících jsou zatížené silami. Při takovém zatížení v prutech vznikají jenom osové sily (tah nebo tlak). Prutové soustavy můžou být prostorové nebo rovinné.

10.1. Tvarová určitost prutových soustav

Prutovou soustavu výhodně posuzujeme jako soustavu hmotných bodů vzájemně vázaných pruty. Prutová soustava může sama o sobě tvořit celek, který nazýváme prutovým tělesem.

Tvarovou určitost prutového tělesa, teda vnější tvarovou určitost rovinné prutové soustavy, budeme posuzovat dle vazbové závislosti platné pro těleso v rovině.

$$i_{vnější} = 3 - u_{vnější}$$

Vnitřní tvarovou určitost prutové soustavy posuzujeme dle vztahu

	>	vnitřně tvarově neurčitá
$i_{vnitřní} = 2s - p$	= 3	vnitřně tvarově určitá
	<	vnitřně tvarově přeurčená

kde:
s – počet styčníků
p – počet prutů
3 – u obou vztahů počet stupňů volnosti prutového tělesa
2 – počet stupňů volnosti pohybu volného hmotného bodu v rovině

Celkovou tvarovou určitost prutové soustavy

$i_c = 2s - p - u_{vo}$, pokud i_c = 0 – soustava je celkově tvorovo a staticky určitá

10.2. Statické řešení prutových soustav

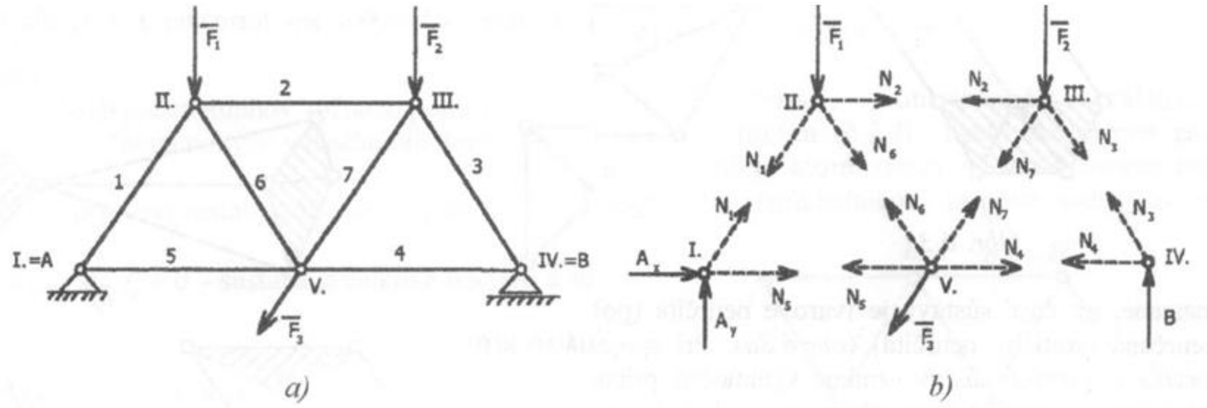
Úlohou statického řešení prutových soustav j určit velikosti osových sil v prutech, jejich orientaci a neznáme parametry vnějších reakcí v závislosti na vnějších zatěžujících silových účincích. Úlohy je možné řešit více metodami.

- Rovnováhu centrálních silových soustav, které působí na jednotlivé styčníky (metoda styčných bodů)
- Rovnováha sil působících na část prutové soustavy (průsečná metoda)

10.3. Metoda styčných bodů

Princip metody spočívá vtom, že se řeší rovnováha všech sil působících na každý styčník osobitě. Při postupném uvolňování všech styčníků se pro každý styčník sestaví podmínky rovnováhy centrální silové soustavy, která na něj působí.

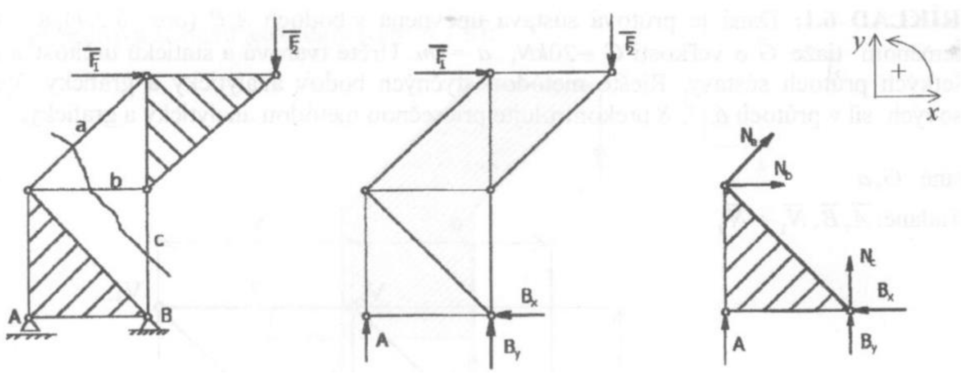
V případě, že soustava jako celek (soustavové těleso) je tvarově a staticky určitá, řešení rovnováhy vnějších sil (sloužících k výpočtu vnějších reakcí) ulehčí celkové řešení rovnovážných rovnic pro jednotlivé styčníky.



10.4. Metoda průsečná

Při řešení osových sil průsečnou metodou vycházíme z předpokladu: pokud je prutová soustava v rovnováze, pak aj sily působící na každou odříznutou část prutové soustavy musí být v rovnováze. Rovnováhu této části můžeme řešit rovnováhu tělesa v rovině, resp. v prostoru. Pro těleso v rovině (prostoru) můžeme napsat 3 (6) nezávislých statických podmínek rovnováhy, z kterých víme určit 3 (6) neznámých osových sil. Z toho vyplívá, že při řešení touto metodou je potřebné rozdělit prutovou soustavu myšleným řezem přes tři (v prostoru šest) pruty, které se neprotínají je jednom bodě.

Z rovnováhy jedné z těchto částí jako prutového tělesa vypočteme osové sily v přetnutých prutech. Pokud na každou z odřezaných částí působí kromě zatěžujících sil aj reakce, při použití průsečné metody je nutné tyto reakce nejprve určit z řešení rovnováhy prutového tělesa.


F1
F2
a
b
c
A
B
Bx
By
Na
Nb
Nc
y
x
+

11. TĚŽIŠTĚ HMOTNÝCH A GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

Střediskem rovnoběžné silové soustavy, které sily jsou vázané k působištím, se zve bod, přes který prochází výslednice této silové soustavy při otočení soustavy o libovolný uhel. V případě, že rovnoběžnými silami jsou sily zemské přitažlivosti (sily tíže jednotlivých částí tělesa), středisko této silové soustavy se zve těžiště tělesa (střeliště hmotnosti, hmotné centrum).

Polohu těžiště můžeme určovat analyticky, graficky a experimentálně. U analytického a grafického řešení je předpokladem znalost rozložení hmotnosti v prostoru tělesa, přičemž grafické řešení se omezuje převážně na rovinné nebo symetrické prostorové tělesa. Experimentální určení polohy těžiště se dělá především při tvarově složitých a nehomogenních tělesech.

11.1. Analytické určení polohy těžiště

Na objemový element dV tělesa měrné hmotnosti ρ působí elementární sila $dG = dG = \rho\, dV\, g$, kde g je velikost gravitačního zrychlení. Pro x-ovú souřadnici těžiště platí vztah

$$x_T = \frac{\int_V \quad x\, \rho\, dV\, g}{\int_V \quad \rho\, dV\, g} = \frac{\int_V \quad x\, \rho\, dV}{\int_V \quad \rho\, dV}$$

přičemž integrujeme v celém objemu V tělesa. Obdobné vztahy získáme pro y_T a z_T. K výpočtu integrálů musíme znát rozložení hustoty ρ v tělese, tj. funkci $\rho = \rho(x, y, z)$.

V případě homogenního útvaru je hustota, resp. měrná tíž tělesa konstantní. Středisko hmoty je v tomto případě totožné s těžištěm geometrického útvaru. Z toho vyplívá, že poloha těžiště homogenního tělesa není závislá od jeho tíže, ale je dané geometrickým tvarem tělesa.

$$x_T = \frac{\int_V \quad x dV}{V}, \qquad y_T = \frac{\int_V \quad y dV}{V}, \qquad z_T = \frac{\int_V \quad z dV}{V}$$

V případě homogenního tělesa konstantní tloušťky t (skořepina) je $dV = t\, dS$, kde dS je element plochy a souřadnice těžiště takého tělesa jsou

$$x_T = \frac{\int_S \; xdS}{S}, \qquad y_T = \frac{\int_S \; ydS}{S}, \qquad z_T = \frac{\int_S \; zdS}{S}$$

kde S je celková plocha tělesa, $\int_S \; x\,dS$ – statický moment tělesa k rovině *yz.*

V případě homogenního tělesa s konstantní průřezovou plochou S po celé délce l je $dV = Sdl$ a souřadnice těžiště takého tělesa jsou

$$x_T = \frac{\int_l \; xdl}{l}, \qquad y_T = \frac{\int_l \; ydl}{l}, \qquad z_T = \frac{\int_l \; zdl}{l}$$

kde l je element jeho délky.

Pokud se dá těleso rozdělit na konečný počet částí, kterých těžiště známe, nebo víme určit, pak těžiště takového složeného homogenního tělesa určíme dle vztahů:

$$x_T = \frac{\sum \; x_i V_i}{\sum \; V_i}, \qquad y_T = \frac{\sum \; y_i V_i}{\sum \; V_i}, \qquad z_T = \frac{\sum \; z_i V_i}{\sum \; V_i}$$

pro skořepinu v prostoru

$$x_T = \frac{\sum \; x_i S_i}{\sum \; S_i}, \qquad y_T = \frac{\sum \; y_i S_i}{\sum \; S_i}, \qquad z_T = \frac{\sum \; z_i S_i}{\sum \; S_i}$$

pro těleso konstantní průřezové plochy, resp. pro čáru v prostoru

$$x_T = \frac{\sum \; x_i l_i}{\sum \; l_i}, \qquad y_T = \frac{\sum \; y_i l_i}{\sum \; l_i}, \qquad z_T = \frac{\sum \; z_i l_i}{\sum \; l_i}$$

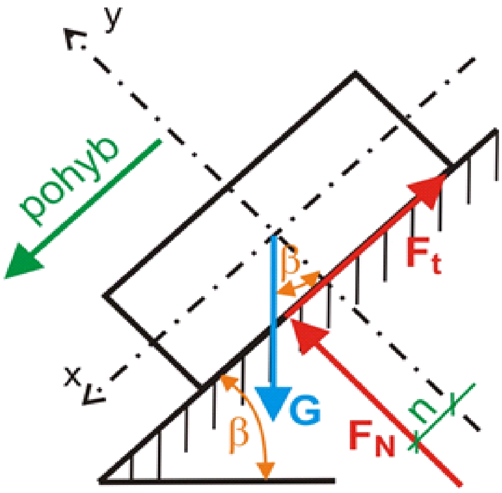
Celý výpočet souřadnic těžiště výhodně uděláme seřazením výsledků částkových výpočtů do tabulky

i	x_i	y_i	z_i	H_i	$x_i H_i$	$y_i H_i$	$z_i H_i$
1 2 ...							
$\sum$				A	B	C	D

Symbol H_i představuje jednu s veličin V_i, S_i, l_i. Souřadnice těžiště určíme podílem příslušných sum.

12. PASIVNÍ ODPORY

12.1. Smykové tření

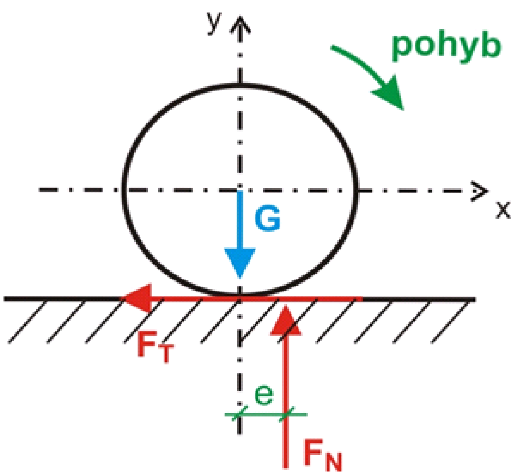


F_t – třecí síla
F_N – normálová reakce

Coulombova reakce: $F_t = F_N * f$

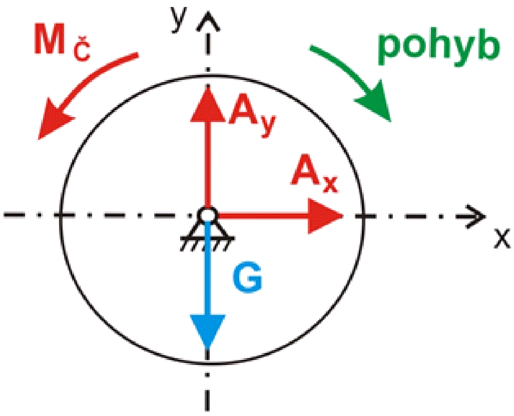
F – součinitel smykového tření
F_t – třecí síla - působí vždy proti směru pohybu

12.2. Valivý odpor – valivá reakce:



F_T – tečná reakce
F_T – působí proti možnému smyku

12.3. Moment čepového tření:

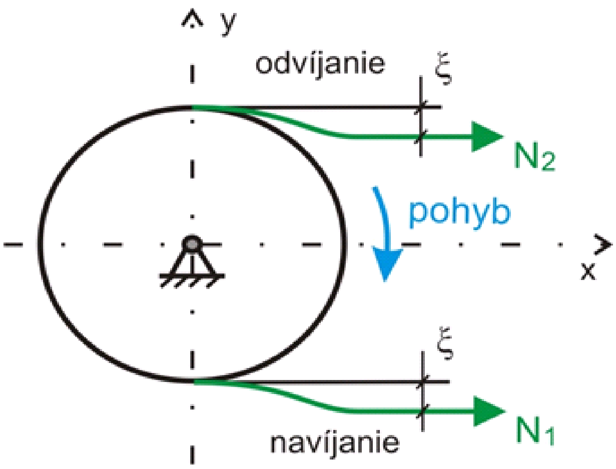


$M_Č = f_Č r_Č A$

$M_Č = f_Č \cdot r_Č \cdot \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

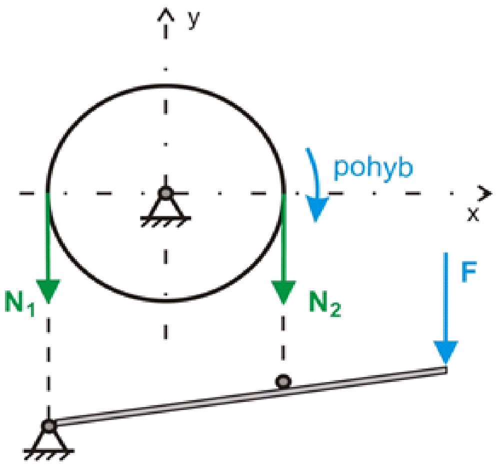
Mč – moment čepového tření
Fč – součinitel čepového tření
Rč – poloměr čepu
A – výsledná reakce v čepu

12.4. Tuhost, neohybnost lan:



ξ *(ksí)* – rameno neohybnosti lana

12.5. Vláknové tření na válcové ploše:



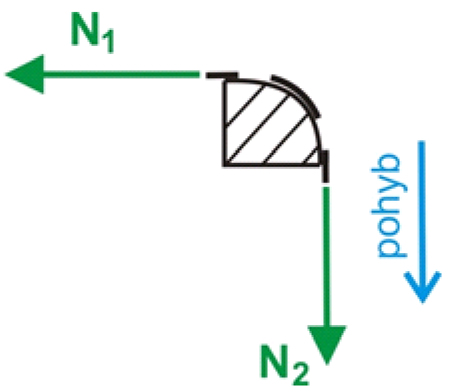
$N_1 > N_2$

Eulerův vztah: $N_1 = N_2 * e^{\alpha * f1}$

α – úhel opásání [rad.]

fl – součinitel vláknového tření na válcové ploše

*α [rad] = (**π / 180) ***α*



$N_1 > N_2$

Eulerův vztah: $N_1 = N_2 * e^{\alpha * f1}$